

В.И. ДЖИГАН

# Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы



ТЕХНОСФЕРА

**УДК 621.372**

**ББК 32.811.3**

**Д41**

**Д41 Джиган В.И.**

**Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы**

**Москва: Техносфера, 2013. – 528 с., ISBN 978-5-94836-342-4**

В книге рассматриваются основные разновидности адаптивных фильтров и их применение в радиотехнических системах и системах связи. Дается представление о математических объектах и методах, используемых в теории адаптивной фильтрации сигналов. Рассматриваются приемы получения вычислительных процедур, сами процедуры и свойства таких алгоритмов адаптивной фильтрации, как алгоритмы Ньютона и наискорейшего спуска, алгоритмы по критерию наименьшего квадрата, рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов и их быстрые (вычислительно эффективные) версии; рекурсивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов для многоканальных фильтров и их версии для обработки нестационарных сигналов, а также многоканальные алгоритмы аффинных проекций. Дано описание стандартных и нестандартных приложений для моделирования адаптивных фильтров на современных языках программирования MATLAB, LabVIEW и SystemVue, а также реализаций адаптивных фильтров на современных цифровых сигнальных процессорах отечественного и зарубежного производства.

Особенностью книги является изложения теоретических материалов для наиболее общего случая – адаптивных фильтров с комплексными весовыми коэффициентами, наличие разделов по многоканальным адаптивным фильтрам и алгоритмам адаптивной фильтрации нестационарных сигналов.

Книга является первым систематическим изложением теории адаптивной фильтрации на русском языке.

Она предназначена для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов радиотехнических и связанных специальностей, изучающих и использующих на практике цифровую обработку сигналов и, в частности, адаптивную фильтрацию сигналов.

**УДК 621.372**

**ББК 32.811.3**

© 2013, В.И. Джиган

© 2013, ЗАО «РИЦ «Техносфера», оригинал-макет, оформление.

**ISBN 978-5-94836-342-4**

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Список сокращений</b> .....	<b>8</b>
<b>Список основных обозначений</b> .....	<b>10</b>
<b>Предисловие</b> .....	<b>15</b>
<b>Глава 1. Введение в адаптивную обработку сигналов</b> .....	<b>20</b>
1.1. Введение.....	20
1.2. Требования к адаптивным фильтрам.....	24
1.3. Критерии функционирования адаптивных фильтров.....	31
1.4. Идентификация неизвестной линейной системы.....	33
1.5. Компенсация эхо-сигналов.....	37
1.6. Выравнивание характеристик электрических каналов связи.....	44
1.7. Адаптивные антенные решетки.....	51
1.8. Шумочистка сигналов.....	53
1.9. Линейное предсказание сигналов.....	57
1.10. Выводы по главе.....	58
<b>Глава 2. Оператор комплексного градиента и его применение в теории адаптивной фильтрации сигналов</b> .....	<b>59</b>
2.1. Введение.....	59
2.2. Несколько простых примеров дифференцирования функций действительных и комплексных переменных.....	60
2.3. Дифференцирование комплексных и действительных функций комплексного переменного.....	63
2.4. Свойства оператора комплексного градиента.....	69
2.5. Выводы по главе.....	71
<b>Глава 3. Основы адаптивной фильтрации сигналов</b> .....	<b>72</b>
3.1. Введение.....	72
3.2. Корреляционная матрица.....	73
3.3. Собственные числа и собственные векторы корреляционной матрицы.....	78
3.4. Винеровская фильтрация.....	86
3.5. Поверхность среднеквадратической ошибки.....	89
3.6. Пример расчета собственных чисел, собственных векторов корреляционной матрицы и поверхности среднеквадратической ошибки.....	99
3.7. Линейно-ограниченная винеровская фильтрация.....	102
3.8. Выводы по главе.....	109

<b>Глава 4. Поиск винеровского решения</b> .....	<b>110</b>
4.1. Введение.....	110
4.2. Алгоритм Ньютона.....	111
4.3. Постоянные времени алгоритма Ньютона.....	114
4.4. Алгоритм наискорейшего спуска.....	118
4.5. Постоянные времени алгоритма наискорейшего спуска.....	120
4.6. Другая интерпретация алгоритма Ньютона.....	131
4.7. Выводы по главе.....	134
<b>Глава 5. LMS-алгоритм и его свойства</b> .....	<b>135</b>
5.1. Введение.....	135
5.2. LMS-алгоритм.....	135
5.3. Переходные процессы в LMS-алгоритме.....	139
5.4. Качество адаптивной фильтрации сигналов с помощью LMS-алгоритма.....	146
5.5. NLMS-алгоритм.....	166
5.6. Градиентные алгоритмы с переменным шагом сходимости.....	171
5.7. Линейно-ограниченные LMS- и NLMS-алгоритмы.....	173
5.8. Выводы по главе.....	181
<b>Глава 6. Рекурсивная адаптивная фильтрация по критерию наименьших квадратов</b> .....	<b>182</b>
6.1. Введение.....	182
6.2. Задача наименьших квадратов и ее решение.....	182
6.3. Основные свойства LS-решения.....	186
6.4. Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов.....	190
6.5. Рекурсивная задача наименьших квадратов.....	194
6.6. Решение рекурсивной задачи наименьших квадратов.....	196
6.7. Качество адаптивной фильтрации с помощью RLS-алгоритма.....	205
6.8. Выводы по главе.....	217
<b>Глава 7. Рекурсивная адаптивная фильтрация по критерию наименьших квадратов на основе обратного QR-разложения</b> .....	<b>218</b>
7.1. Введение.....	218
7.2. RLS-фильтрация с помощью прямого QR-разложения.....	219
7.3. Рекурсивное вычисление вектора весовых коэффициентов.....	222
7.4. Рекурсивное вычисление некоторых переменных.....	225
7.5. Обратное QR-разложение.....	228
7.6. Вычисление обратного разложения Холецкого.....	236
7.7. Параллельная реализация IQRD RLS-алгоритма.....	239
7.8. Выводы по главе.....	243

<b>Глава 8. Рекурсивная адаптивная фильтрация по критерию наименьших квадратов на базе прямого QR-разложения</b> .....	<b>244</b>
8.1. Введение.....	244
8.2. Рекурсивная форма прямого QR-разложения.....	245
8.3. Рекурсивное вычисление ошибок.....	250
8.4. Параллельная реализация QRD RLS-алгоритма.....	257
8.5. Выводы по главе.....	259
<b>Глава 9. Уменьшение вычислительной сложности рекурсивных алгоритмов адаптивной фильтрации по критерию наименьших квадратов</b> .....	<b>260</b>
9.1. Введение.....	260
9.2. Преобразование Хаусхолдера.....	261
9.3. RLS-алгоритм, использующий преобразование Хаусхолдера.....	265
9.4. Исключение операций извлечения квадратного корня в алгоритмах на основе обратного QR-разложения.....	270
9.5. Исключение операций извлечения квадратного корня в алгоритмах на основе прямого QR-разложения.....	277
9.6. Выводы по главе.....	283
<b>Глава 10. Линейно-ограниченная рекурсивная адаптивная фильтрация по критерию наименьших квадратов</b> .....	<b>284</b>
10.1. Введение.....	284
10.2. Постановка и решение линейно-ограниченной RLS-задачи адаптивной фильтрации.....	284
10.3. Линейно-ограниченный RLS-алгоритм.....	287
10.4. Двойное ограничение в RLS-алгоритме.....	291
10.5. RLS-алгоритм с двойным ограничением и линейной вычислительной сложностью.....	293
10.6. Выводы по главе.....	297
<b>Глава 11. Быстрые рекурсивные адаптивные алгоритмы по критерию наименьших квадратов</b> .....	<b>298</b>
11.1. Введение.....	298
11.2. Линейное предсказание вперед.....	300
11.3. Линейное предсказание назад.....	304
11.4. Быстрое вычисление вектора коэффициентов Калмана.....	307
11.5. Соотношение между апостериорными и априорными ошибками.....	312
11.6. Рекурсивное вычисление отношения ошибок.....	313
11.7. Быстрый алгоритм Калмана.....	315
11.8. FTF-алгоритм.....	317

11.9. FAEST-алгоритм.....	320
11.10. Выводы по главе.....	323
<b>Глава 12. Быстрые лестничные алгоритмы.....</b>	<b>324</b>
12.1. Введение.....	324
12.2. Рекурсивное вычисление энергий ошибок линейного предсказания.....	325
12.3. Рекурсивное вычисление ошибок линейного предсказания и коэффициентов отражения.....	330
12.4. Рекурсивное вычисление ошибок моделирования требуемого сигнала адаптивного фильтра.....	334
12.5. Рекурсивные адаптивные алгоритмы на основе вычисления априорных и апостериорных ошибок.....	338
12.6. Рекурсивные адаптивные алгоритмы с обратными связями на основе вычисления априорных и апостериорных ошибок.....	343
12.7. Нормализованный лестничный алгоритм.....	350
12.8. Алгоритм на основе QR-разложения с операциями извлечения квадратного корня.....	359
12.9. Алгоритм на основе QR-разложения без операций извлечения квадратного корня.....	370
12.10. Алгоритм на основе QR-разложения с операциями извлечения квадратного корня в пространстве состояний.....	373
12.11. Выводы по главе.....	376
<b>Глава 13. Многоканальные RLS-алгоритмы.....</b>	<b>377</b>
13.1. Введение.....	377
13.2. B-SUSD линейное предсказание.....	378
13.3. B-SUSD-вычисление векторов коэффициентов Калмана и отношений ошибок линейного предсказания.....	385
13.4. B-SUSD быстрые RLS-алгоритмы.....	392
13.5. 1-SUSD линейное предсказание.....	398
13.6. 1-SUSD вычисление векторов коэффициентов Калмана и отношений ошибок линейного предсказания.....	402
13.7. 1-SUSD быстрые RLS-алгоритмы.....	411
13.8. Выводы по главе.....	418
<b>Глава 14. Другие разновидности RLS-алгоритмов.....</b>	<b>419</b>
14.1. Введение.....	419
14.2. Быстрые алгоритмы на основе обратного QR-разложения.....	420
14.3. Регуляризация RLS-алгоритмов.....	425
14.4. RLS-алгоритмы со скользящим окном.....	428

14.5. Одновременное использование скользящего окна и регуляризации в RLS-алгоритмах.....	432
14.6. Параллельные RLS-алгоритмы, допускающие вычисления с помощью двух или четырех процессоров.....	438
14.7. Особенности построения быстрых многоканальных алгоритмов аффинных проекций.....	443
14.8. Инициализация RLS-алгоритмов.....	458
14.9. Выводы по главе.....	463
<b>Глава 15. Применение адаптивных алгоритмов.....</b>	<b>464</b>
15.1. Введение.....	464
15.2. Моделирование адаптивных фильтров с помощью приложений DSP System Toolbox языка MATLAB.....	466
15.3. Нестандартные программные средства для моделирования адаптивных фильтров на языке MATLAB.....	471
15.4. Моделирование приложений адаптивной фильтрации с помощью Adaptive Filter Toolkit среды разработки LabVIEW.....	472
15.5. Нестандартные программные средства для моделирования адаптивных фильтров в среде разработки LabVIEW.....	484
15.6. Моделирование приложений адаптивной фильтрации с помощью Adaptive Equalization Library среды разработки SystemVue.....	489
15.7. Библиотека адаптивной фильтрации для ЦСП отечественного семейства «Мультикор».....	494
15.8. Приложения адаптивной фильтрации для цифровых сигнальных процессоров компаний Texas Instruments, Analog Devices и Freescale Semiconductor.....	498
15.9. Выводы по главе.....	501
<b>Заключение.....</b>	<b>502</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>505</b>
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>521</b>

# ГЛАВА I

## ВВЕДЕНИЕ В АДАПТИВНУЮ ОБРАБОТКУ СИГНАЛОВ

Настоящая глава является введением в теорию адаптивной обработки сигналов. В ней приводятся общие сведения об адаптивных фильтрах, их структурах, целевых функциях, критериях работы, а также показателях качества. Рассматриваются примеры применения адаптивных фильтров при решении практических задач, встречающихся в радиотехнике и связи: адаптивные эхо-компенсаторы, эквалайзеры, антенные решетки, адаптивная шумоочистка и адаптивная фильтрация узкополосных сигналов.

### I.1. Введение

Согласно разным оценкам на сегодняшний день в научно-технических журналах и трудах научно-технических конференций насчитывается более 10 тысяч публикаций, освещающих самые разные вопросы теории и практики адаптивной обработки сигналов. Эти вопросы также рассматриваются в ряде книг [1—33]. Такое число публикаций свидетельствует об огромных теоретических достижениях в этой области, нашедших свое отражение в адаптивных устройствах, применяемых на протяжении уже многих десятилетий в различных радиоэлектронных изделиях. Примерами адаптивных устройств являются компенсаторы сигналов электрического и акустического эха, эквалайзеры (выравниватели) характеристик электрических и акустических каналов связи, адаптивные антенные и акустические решетки [34—36]. Сегодня можно констатировать тот факт, что адаптивные устройства — это неотъемлемые элементы оборудования современных радиотехнических систем и систем связи, тактико-технические характеристики которых порой недостижимы без использования адаптивной обработки сигналов.

Действительно, сигналы ближнего и дальнего эха являются источниками помех для модемов, работающих в дуплексном режиме, а межсимвольная интерференция является источником помех в каналах связи с ограниченной по-

лосой пропускания. Для достижения модемами высоких скоростей передачи и приема цифровых данных эти помехи должны быть подавлены, что осуществляется с помощью адаптивных эхо-компенсаторов и эквалайзеров.

Положительная обратная акустическая связь, возникающая в оборудовании озвучивания помещений (концертные залы, залы для совещаний) и в устройствах голосовой связи («hands-free»), устраняется с помощью адаптивных компенсаторов сигналов акустического эха. Выравнивание акустических характеристик помещений при использовании оборудования высококачественного воспроизведения звука осуществляется с помощью адаптивных эквалайзеров.

Подавление активных помех, частотный диапазон которых совпадает с частотным диапазоном полезного сигнала, в радиолокации, гидролокации и связи осуществляется с помощью адаптивных антенных и акустических решеток. Эти решетки являются пространственными фильтрами. Они обеспечивают подавление сигналов помех, направления на источники которых отличаются от направления на источник полезного сигнала.

Практические результаты адаптивной обработки сигналов во многом сегодня обязаны технологическим достижениям в электронике и микроэлектронике, благодаря которым появились одновременно высокопроизводительные и компактные цифровые устройства на базе программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) и сверхбольших интегральных схем (СБИС) цифровых сигнальных процессоров (ЦСП). Эти устройства обеспечивают реализацию сложных алгоритмов ЦОС в реальном масштабе времени, т. е. на требуемой частоте дискретизации обрабатываемых сигналов.

Таким образом, многолетние теоретические и практические достижения в адаптивной обработке сигналов позволяют считать ее сложившимся научно-техническим направлением в современной радиотехнике и связи.

Но что такое адаптивная обработка сигналов, или, в более широком смысле, адаптация? Вот лишь некоторые определения этого термина [3]. «Адаптация — это:

- действие, процесс приспособления;
- состояние приспособляемого, приспособление;
- любое изменение в структуре или функции организма или любой из его частей в результате естественного отбора, с помощью которого организм становится более приспособленным для выживания и размножения в окружающей его среде; видоизменение формы или структуры в соответствии с изменением окружающей среды;
- ослабление отклика сенсорных рецепторов, таких как зрение, осязание, температура, обоняние, слух и боль, на изменяющиеся, постоянно воздействующие условия окружающей среды;

- регулирование зрачком количества света, поступающего в глаз;
- медленное, обычно не осознанное изменение индивидуальной и социальной деятельности в процессе приспособления к культурной среде».

Перечисленные определения термина «адаптация» характеризуют в основном живой мир. Однако этот термин применим и к искусственным устройствам и системам, которые в процессе своего функционирования могут самообучаться. В основе большинства искусственных адаптивных устройств лежит **адаптивный фильтр**.

Фильтрация сигналов — это такая их обработка, целью которой является извлечение интересующей информации, например сигналов, обладающих определенными характеристиками. Обработка сигналов может выполняться как аналоговым, так и цифровым способом. В книге мы будем рассматривать только цифровую фильтрацию, предполагая, что обрабатываемые сигналы дискретизованы с частотой, регламентируемой теоремой Котельникова, известной в зарубежной литературе как теорема отсчетов, и оцифрованы с числом разрядов, определяемым динамическим диапазоном этих сигналов.

Известно, что свойства цифрового фильтра с фиксированными параметрами обычно определяются его передаточной функцией. В свою очередь, передаточная функция определяет структуру фильтра и его вычислительную сложность. Если требования к передаточной функции невозможно сформулировать заранее или эти требования могут меняться в процессе работы фильтра, то вместо фильтра с фиксированными параметрами необходимо использовать фильтр с изменяемыми параметрами, например адаптивный.

Так как параметры адаптивного фильтра меняются в процессе его работы, то очевидно, что такой фильтр является нелинейным устройством. Однако при каждом фиксированном значении параметров адаптивный фильтр представляет собой линейное устройство, так как между его входными и выходными сигналами обычно существует линейная зависимость, определяемая текущим набором ВК, подобно линейным фильтрам с фиксированными параметрами.

Таким образом, адаптивный фильтр — это фильтр с изменяемыми в процессе работы параметрами, набор которых во многом зависит от критерия работы адаптивного фильтра. Этим критерием часто является достижение минимума некоторой целевой функции, как правило, квадратичной функции ошибки между так называемым требуемым и выходным сигналами адаптивного фильтра. Достижение минимума целевой функции означает, что выходной сигнал адаптивного фильтра «близок» к требуемому сигналу, т. е. повторяет по форме этот сигнал.

Выходной сигнал адаптивного фильтра приближается к требуемому сигналу за счет изменения ВК, рассчитываемых на основе обработки требуемого и вход-

ного (входных в многоканальном случае) сигналов. В установившемся режиме значения ВК соответствуют минимуму целевой функции или находятся в небольшой окрестности этого минимума. Так как состояние адаптивного фильтра меняется в процессе настройки ВК, то считается, что он приспосабливается или адаптируется к существующим условиям функционирования. Поэтому и такой фильтр, и алгоритм вычисления его ВК называют адаптивными.

Адаптивные алгоритмы являются основным предметом рассмотрения в настоящей книге. Это, собственно, алгоритмы фильтрации, т. е. вычисления выходного сигнала адаптивного фильтра, и алгоритмы вычисления его ВК. Совокупность данных алгоритмов будем равнозначно называть или адаптивным фильтром, или адаптивным алгоритмом.

Анализ адаптивных фильтров как нелинейных устройств является более сложным, чем анализ фильтров с фиксированными параметрами. Но адаптивные фильтры являются самонастраивающимся и с этой точки зрения они более простые, так как не требуют использования сложных и ресурсоемких методов расчета, применяемых при синтезе фильтров с фиксированными ВК.

Если условия функционирования меняются, то адаптивный фильтр может эти изменения в некоторой степени отслеживать. При этом следует понимать, что адаптивный фильтр и следящая система — это не совсем одно и то же. Адаптивный фильтр, подобно фильтрам с фиксированными ВК, характеризуется длительностью переходного процесса. Если изменения в системе медленные, т. е. происходят за время, существенно превышающее длительность переходного процесса адаптивного фильтра, то этот фильтр такие изменения, как правило, отслеживает. По мере же увеличения скорости изменений в системе эффективность адаптивного фильтра падает, так как за время изменения он не успевает «полностью настроиться», т. е. перейти в установившийся режим, когда его переходный процесс считается законченным.

В общем случае одноканальный адаптивный фильтр представляет собой устройство, показанное на рис. 1.1. Здесь  $x(k)$  — входной сигнал,  $d(k)$  — требуемый сигнал (используемый в обозначении символ «d» происходит от английского слова «desired», т. е. требуемый),  $y(k)$  — выходной сигнал,  $\alpha(k) = d(k) - y(k)$  — сигнал ошибки,  $k$  — индекс дискретного времени или номер отсчета обрабатываемого сигнала. Эти отсчеты обычно равномерно распределены на оси времени как  $t = kT_s = k/F_s$ , где  $T_s$  — период дискретизации, а  $F_s$  — частота дискретизации обрабатываемых сигналов. Длительность одной итерации адаптивного алгоритма, т. е. время, в течение которого осуществляется расчет ВК, используемых для вычисления выходного сигнала адаптивного фильтра на следующей итерации, в большинстве случаев равна одному периоду дискретизации. Если расчет ВК ведется медленно, т. е. в течение нескольких периодов дискретизации, то формирование сигнала  $y(k)$  все равно необходимо

осуществлять на каждом периоде дискретизации для удовлетворения требованиям теоремы Котельникова.

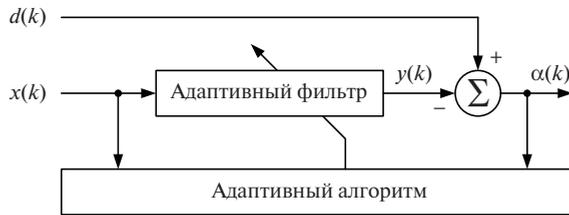


Рис. 1.1. Адаптивный фильтр

Для работы адаптивного фильтра, как правило, недостаточно информации, получаемой только из входного сигнала. Источником недостающей информации обычно служит требуемый сигнал  $d(k)$ , физическая природа которого определяется конкретным применением адаптивного фильтра. Применение является одним из факторов, определяющих требования, предъявляемые к адаптивному фильтру на этапе его проектирования.

## 1.2. Требования к адаптивным фильтрам

Согласно [29] основные требования к адаптивному фильтру определяются такими составляющими, как приложение, структура и алгоритм.

**1. Приложения.** Тип приложения определяется сигналами, поступающими из окружающей среды в качестве входного  $x(k)$  и требуемого  $d(k)$  сигналов. Наиболее известными и широко используемыми приложениями адаптивных фильтров являются уже упоминавшиеся эхо-компенсаторы, эквалайзеры, адаптивные решетки и ряд других устройств. Данная книга не преследует своей целью рассмотрение приложений адаптивных фильтров. Однако некоторые из них будут кратко рассмотрены в настоящей главе с целью демонстрации областей использования адаптивных фильтров при решении задач радиотехники и связи.

**2. Структуры адаптивных фильтров.** Подобно фильтрам с фиксированными ВК, существуют две основные структуры адаптивных фильтров. Это фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ), или трансверсальные, и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ), или рекурсивные. Структура одноканального адаптивного КИХ-фильтра приведена на рис. 1.2.

Выходной сигнал  $y(k)$  адаптивного фильтра формируется как линейная комбинация задержанных отсчетов входного сигнала  $x(k-n+1)$ , взятых с весами  $h_n(k-1)$ , вычисляемыми на предыдущих итерациях  $(k-1)$  по отношению к текущим итерациям  $k$ , т. е. как

$$y(k) = \sum_{n=1}^N h_n^*(k-1)x(k-n+1) = \mathbf{h}_N^H(k-1)\mathbf{x}_N(k), \quad (1.1)$$

где  $N$  — число ВК фильтра, а  $\mathbf{h}_N(k-1) = [h_1(k-1), h_2(k-1), \dots, h_n(k-1), \dots, h_{N-1}(k-1), h_N(k-1)]^T$  — вектор ВК и  $\mathbf{x}_N(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n+1), \dots, x(k-N+2), x(k-N+1)]^T$  — вектор сигналов в фильтре. Порядок фильтра определяется как  $N-1$ , т. е. по числу линий задержки. Векторы  $\mathbf{h}_N(k)$  и  $\mathbf{x}_N(k)$  в общем случае являются комплексными.

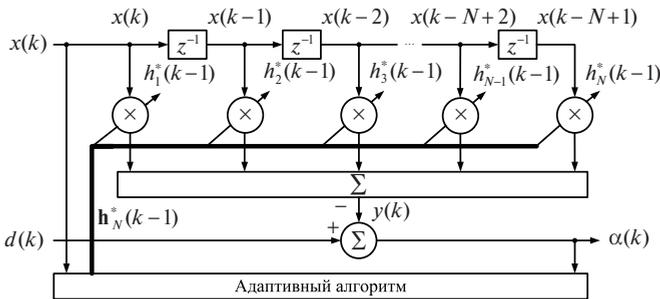


Рис. 1.2. Одноканальный адаптивный КИХ-фильтр

Здесь и далее верхний индекс  $T$  будет использоваться для обозначения операции транспонирования вектора или матрицы, а верхний индекс  $H$  — для обозначения операции эрмитова сопряжения, т. е. транспонирования и комплексного сопряжения, обозначаемого символом  $*$ , элементов вектора или матрицы. Первый нижний индекс  $N$  в обозначениях векторов и матриц будет указывать на число элементов в векторе или число элементов в квадратной матрице, определяемое как  $N \times N$ . Число элементов в прямоугольной матрице будет обозначаться двумя первыми нижними индексами. Например, запись  $\mathbf{A}_{NM}^T$  будет обозначать операцию транспонирования матрицы  $\mathbf{A}_{NM}$ , т. е. матрицу  $\mathbf{B}_{MN} = \mathbf{A}_{NM}^T$ . Таким образом, нижние индексы в обозначении матриц будут указывать на число элементов нетранспонированных матриц. В ряде случаев нижний индекс  $N$  также будет использоваться в обозначениях скалярных переменных, указывая на то, что эти переменные являются функциями от  $N$ -мерных векторов для различения одноименных скалярных переменных, являющихся функциями от  $(N+1)$ -,  $N$ - или  $(N-1)$ -мерных векторов в быстрых алгоритмах адаптивной фильтрации.

Векторы везде будут обозначаться полужирными строчными символами, а матрицы — полужирными заглавными. Элементы матриц и векторов будут обозначаться соответственно обычными строчными и заглавными символами. Нижние индексы в элементах матриц и векторов будут обозначать номера этих элементов в матрицах и векторах согласно общепринятой системе их нумерации. В качестве других признаков в обозначениях векторов, матриц или их элементов могут быть использованы различные символы в нижнем индексе,

следующие через запятую после обозначения размера вектора или матрицы или номеров их элементов, а также символы в верхнем индексе. Единичная матрица (квадратная диагональная матрица с единицами на главной диагонали и нулевыми остальными элементами) будет обозначаться символом  $\mathbf{I}_N$ , нулевые матрицы (матрицы, содержащие только нулевые элементы) — символами  $\mathbf{O}_N$  и  $\mathbf{O}_{NM}$ , единичный вектор (вектор, содержащий все единицы) — символом  $\mathbf{i}_N$ , а нулевой вектор (вектор, содержащий только нулевые элементы) — символом  $\mathbf{0}_N$ . Под вектором обычно будет пониматься вектор-столбец.

Используя выходной сигнал адаптивного фильтра (1.1), можно вычислить сигнал априорной ошибки моделирования требуемого сигнала  $d(k)$  как

$$\alpha(k) = d(k) - y(k) = d(k) - \mathbf{h}_N^H(k-1)\mathbf{x}_N(k). \quad (1.2)$$

Сигнал апостериорной ошибки определяется при ВК, равных  $\mathbf{h}_N(k)$ , как

$$e(k) = d(k) - \hat{y}(k) = d(k) - \mathbf{h}_N^H(k)\mathbf{x}_N(k). \quad (1.3)$$

Как видно, термины «априорный» и «апостериорный» связаны со значениями ВК адаптивного фильтра, вычисляемыми соответственно на предыдущей и текущей итерациях алгоритма адаптивной фильтрации.

На практике при работе адаптивного фильтра на его выходе наблюдаются априорные ошибки (1.2), так как текущее значение выходного сигнала фильтра  $y(k)$  формируется по значениям ВК, вычисленным на предыдущей итерации. Апостериорные ошибки (1.3) обычно используются в алгоритмах вычисления ВК и при формировании целевой функции работы адаптивного фильтра, например среднеквадратической ошибки (Mean Square Error, MSE)  $F = E\{e(k)e^*(k)\} = E\{|e(k)|^2\}$ , где  $E\{\bullet\}$  — операция усреднения по ансамблю реализаций. В случае КИХ-фильтров такая функция, как будет показано в главе 3, является действительной унимодальной квадратичной функцией в пространстве действительных или комплексных ВК, т. е. характеризуется единственным минимумом.

В книге будут рассматриваться в основном адаптивные фильтры с комплексными ВК. Это обусловлено некоторыми математическими тонкостями, используемыми при получении алгоритмов вычисления ВК для таких фильтров, а также тем, что переход от адаптивных алгоритмов для фильтров с действительными ВК к алгоритмам для фильтров с комплексными ВК часто не очевиден, несмотря на то, что он сводится в основном к правильной расстановке операций комплексного сопряжения некоторых переменных, используемых в алгоритмах.

Поэтому в настоящей книге теория адаптивной фильтрации будет излагаться применительно к фильтрам с комплексными ВК, так как в большинстве литературных источников адаптивные алгоритмы рассматриваются в основном для фильтров с действительными ВК. Переход от описания фильтров с комплекс-

ными ВК к описанию фильтров с действительными ВК является тривиальным и обычно сводится к исключению всех операций комплексного сопряжения в матрицах, векторах и скалярных переменных. Этот переход, как будет показано в главе 2, сопровождается появлением в некоторых математических выражениях фиксированного множителя, равного 2, который отсутствует в математических выражениях алгоритмов для адаптивных фильтров с комплексными ВК.

В адаптивных антенных решетках (ААР) или эхо-компенсаторах и эквалайзерах оборудования цифровых систем связи с квадратурной модуляцией обрабатываются комплексные сигналы. Это естественным образом приводит к необходимости использования адаптивных фильтров с комплексными ВК.

В общем случае адаптивные КИХ-фильтры могут быть многоканальными и при этом содержать неодинаковое число ВК в каналах (рис. 1.3). Вектор ВК такого  $M$ -канального адаптивного фильтра

$$\mathbf{h}_N(k-1) = [\mathbf{h}_{N_1}^T(k-1), \mathbf{h}_{N_2}^T(k-1), \dots, \mathbf{h}_{N_m}^T(k-1), \dots, \mathbf{h}_{N_{M-1}}^T(k-1), \mathbf{h}_{N_M}^T(k-1)]^T$$

образуется из последовательности векторов ВК каналов

$$\mathbf{h}_{N_m}(k) = [h_{1,m}(k-1), h_{2,m}(k-1), \dots, h_{n,m}(k-1), \dots, h_{N_{m-1},m}(k-1), h_{N_m,m}(k-1)]^T,$$

а вектор сигналов  $\mathbf{x}_N(k) = [\mathbf{x}_{N_1}^T(k), \mathbf{x}_{N_2}^T(k), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^T(k), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^T(k), \mathbf{x}_{N_M}^T(k)]^T$  — из последовательности векторов сигналов каналов

$$\mathbf{x}_{N_m}(k) = [x_m(k), x_m(k-1), \dots, x_m(k-n_m+1), \dots, x_m(k-N_m+2), x_m(k-N_m+1)]^T.$$

Суммарное число ВК многоканального фильтра определяется как  $N = \sum_{m=1}^M N_m$ .

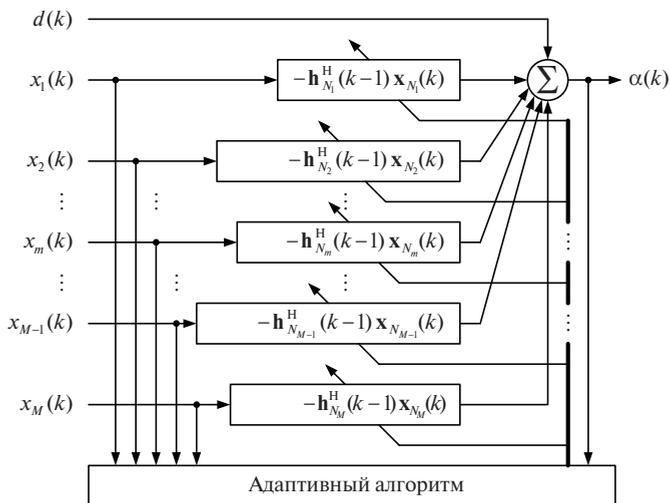


Рис. 1.3. Многоканальный адаптивный КИХ-фильтр

Неодинаковое число ВК в каналах многоканального адаптивного фильтра, с одной стороны, часто диктуется физической природой задачи, а с другой — обусловлено всегда существующими ограничениями на вычислительную сложность реализации фильтров. Так как в адаптивных фильтрах вычислительная сложность является функцией полного числа ВК  $N$ , то это число не следует увеличивать, если на то нет каких-либо причин, несмотря даже на то, что ряд алгоритмов, например для многоканальных адаптивных фильтров с одинаковым числом ВК в каналах, математически (алгоритмически) «много проще» алгоритмов для фильтров с неодинаковым числом ВК в каналах.

Под вычислительной сложностью алгоритмов ЦОС, к которым принадлежат и алгоритмы адаптивной фильтрации сигналов, понимается число арифметических операций (обычно сложений, вычитаний, умножений и делений, а иногда и более сложных операций, например извлечения квадратных корней), требуемых для выполнения одной итерации алгоритма.

Следует отметить две частные структуры адаптивного фильтра (см. рис. 1.3). Это многоканальный фильтр с одним ВК ( $N_m = 1, m = 1, 2, \dots, M$ ) в каждом из каналов, который используется в узкополосных ААР, и многоканальный фильтр с одинаковым числом ВК в каналах  $N_1 = N_2 = \dots = N_M > 1$ , который используется в широкополосных акустических решетках [1, 4–6, 23] или многоканальных компенсаторах сигналов акустического эха [37]. Структура многоканального фильтра общего вида (см. рис. 1.3) также используется при реализации нелинейных полиномиальных адаптивных фильтров, в которых нелинейные ядра представляют собой наборы из многоканальных фильтров с числом ВК в каналах, изменяемым от  $N_1 = 1$  до  $N_M = N$  с шагом, равным одному ВК [28]. Кроме того, компенсатор сигналов ближнего и дальнего эха в модемах для проводных каналов связи [38] или эквалайзер с обратной связью [39, 40] можно также рассматривать как двухканальный адаптивный фильтр с неодинаковым числом ВК в каналах.

В настоящей книге в основном будут рассматриваться одноканальные адаптивные фильтры. В главе 13 будут рассмотрены многоканальные адаптивные фильтры общего вида (см. рис. 1.3).

Адаптивные БИХ-фильтры [16] на сегодняшний день пока еще не нашли широкого применения на практике, так как, помимо проблем с устойчивостью, им свойственна проблема многоэкстремальности (т.е. неунимодальности) целевой функции, что не позволяет в общем случае гарантировать сходимость процесса вычисления ВК к глобальному (т.е. наилучшему) решению.

**3. Алгоритмы.** Адаптивный алгоритм — это процедура вычисления ВК, обеспечивающих минимизацию целевой функции адаптивного фильтра, т.е. выполнения критерия его работы. Алгоритм характеризуется видом используемой целевой функции, методом поиска оптимального решения и природой

сигналов ошибок. В адаптивных алгоритмах, как правило, используются арифметические операции как над априорными, так и над апостериорными ошибками. Процедуры вычисления выходных сигналов адаптивного фильтра  $y(k) = \mathbf{h}_N^H(k-1)\mathbf{x}_N(k)$  и  $\hat{y}(k) = \mathbf{h}_N^H(k)\mathbf{x}_N(k)$  в уравнениях (1.2) и (1.3), т.е. собственно фильтрация сигналов, также часто считаются составными частями адаптивного алгоритма.

Большинство вычислений в адаптивных алгоритмах представляет собой итерационные процедуры. Эти итерации, как правило, совпадают по длительности с периодом дискретизации обрабатываемых сигналов. При этом вычисляемые переменные обновляются на каждой итерации в результате прибавления некоторых добавок к предыдущим значениям или вычитания этих добавок из предыдущих значений.

Например, вычисление ВК в адаптивном алгоритме по критерию наименьшего среднего квадрата (Least Mean Square, LMS) выполняется как

$$\mathbf{h}_N(k) = \mathbf{h}_N(k-1) + \mu \mathbf{x}_N(k)\alpha^*(k), \quad (1.4)$$

т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{текущее} \\ \text{значение} \\ \text{вектора ВК} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{предыдущее} \\ \text{значение} \\ \text{вектора ВК} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{шаг} \\ \text{сходимости} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{входных} \\ \text{сигналов} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{ошибка} \end{array} \right\}.$$

В рекурсивных алгоритмах по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS) вычисление ВК выполняется как

$$\mathbf{h}_N(k) = \mathbf{h}_N(k-1) + \mathbf{g}_N(k)\alpha^*(k), \quad (1.5)$$

т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{текущее} \\ \text{значение} \\ \text{вектора ВК} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{предыдущее} \\ \text{значение} \\ \text{вектора ВК} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{вектор} \\ \text{коэффициентов} \\ \text{Калмана} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{ошибка} \end{array} \right\}.$$

Здесь текущие и предыдущие значения векторов ВК связаны с номерами итераций алгоритма  $k$  и  $k-1$ . В ряде других алгоритмов, например в алгоритмах на основе QR-разложения и в лестничных алгоритмах, также используются рекурсивные вычисления, связанные с изменением порядка фильтра на единицу на каждой итерации по  $k$ .

Выбор адаптивного алгоритма обычно обусловлен рядом таких требований, как длительность переходного процесса, характеризующая скорость сходимости и следящие свойства адаптивного фильтра; значение остаточных ошибок в установившемся режиме, характеризующее точность нахождения оптимального решения; вычислительная сложность алгоритма, характеризующая сложность его аппаратной или программной реализации.

К этим требованиям следует добавить понятие алгоритмической сложности, под которой понимается сложность математического представления алгоритмов, обусловленная числом и разнообразием математических выражений (формул), являющихся, собственно, алгоритмом. Алгоритмическая сложность и арифметическая сложность в конечном итоге влияют на сложность реализации алгоритмов.

С точки зрения сложности алгоритмы адаптивной обработки сигналов можно условно разделить на несколько групп. Существуют вычислительно-простые алгоритмы, т. е. с малым числом арифметических операций на одну итерацию. Это алгоритмы с линейной вычислительной сложностью  $O(N)$  и малой алгоритмической сложностью. Такие алгоритмы обычно описываются всего лишь несколькими простыми математическими выражениями. Примерами простых алгоритмов являются LMS-алгоритм и другие адаптивные алгоритмы на основе стратегий градиентного поиска ВК. Алгоритм по критерию наименьших квадратов (Least Squares, LS) характеризуется большой вычислительной сложностью  $O(N^3)$  и малой алгоритмической сложностью. RLS-алгоритмы характеризуются средней вычислительной сложностью  $O(N^2)$  и средней алгоритмической сложностью. Быстрые, т. е. вычислительно-эффективные или с малым числом арифметических операций на одну итерацию, RLS-алгоритмы характеризуются низкой вычислительной сложностью  $O(N)$  и большой алгоритмической сложностью, так как представляются достаточно большим числом разнообразных математических формул.

При реализации адаптивных фильтров формально воспроизвести сложные алгоритмы адаптивной обработки сигналов не всегда удается с первого раза. Это происходит от того, что авторы книг и статей обычно не придерживаются единого обозначения переменных в адаптивных алгоритмах, опускают важные вопросы их инициализации, что не способствует однозначному пониманию этих алгоритмов.

В результате, на практике до сих пор в основном используются адаптивные фильтры на базе простых алгоритмов. Известный специалист в области адаптивной фильтрации Джон Чиоффи (John Cioffi) в 1996 году сказал: «Эксперты на протяжении уже многих лет разрабатывают сложные и эффективные RLS-алгоритмы, однако инженеры их не любят, так как не понимают, а потому предпочитают использовать в основном простые градиентные алгоритмы» [41].

Такое отношение к сложным алгоритмам адаптивной фильтрации в прошлом было во многом обусловлено также и низкой производительностью цифровой элементной базы. Чтобы при реализации сложных алгоритмов обеспечивалась требуемая частота дискретизации сигналов, необходимо было располагать определенными вычислительными ресурсами, которые на то время были часто

недоступны. Однако сегодня такие алгоритмы [42] уже реализуемы на современной элементной базе [43, 44].

Поэтому цель настоящей книги — показать исследователям и разработчикам адаптивных устройств, как синтезируются простые и сложные алгоритмы адаптивной обработки сигналов, а также сравнить преимущества и недостатки таких алгоритмов по отношению друг к другу. Это должно способствовать использованию в современных приложениях не только простых, но и сложных алгоритмов адаптивной фильтрации.

### 1.3. Критерии функционирования адаптивных фильтров

В процессе работы адаптивного алгоритма осуществляется поиск таких параметров адаптивного фильтра, как правило, вектора  $\mathbf{BK} \mathbf{h}_N(k)$ , при которых значение заданной целевой функции является минимальным. Это обычно функция входного, выходного и требуемого сигналов, т. е.  $F = f\{x(k), y(k), d(k)\}$ . Целевую функцию можно рассматривать и как функцию ошибок, т. е.  $F = f\{e(k)\}$ . Она должна быть действительной и неотрицательной, т. е.  $F \geq 0$  для всех  $x(k)$ ,  $y(k)$  и  $d(k)$ . При работе адаптивного фильтра  $\mathbf{h}_N(k) \rightarrow \mathbf{h}_{N,o}$ , где  $\mathbf{h}_{N,o}$  — вектор координат минимума многомерной целевой функции в пространстве ВК. Достижение минимума этой функции является критерием работы адаптивного фильтра.

Существуют разные способы определения целевой функции адаптивного фильтра, влияющие в конечном итоге на сложность алгоритмов ее минимизации. Целевыми функциями, наиболее часто используемыми в адаптивной фильтрации, являются:

- 1)  $F = f\{e(k)\} = E\{|e(k)|^2\}$  — среднеквадратическая ошибка (MSE);
- 2)  $F = f\{e(k)\} = \sum_{i=1}^k |e(i)|^2$  — наименьшие квадраты ошибок (Least Squares, LS);
- 3)  $F = f\{e(k)\} = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} |e(i)|^2$  — взвешенные наименьшие квадраты ошибок (Weighted Least Squares, WLS);
- 4)  $F = f\{e(k)\} = |e(k)|^2$  — квадрат мгновенной ошибки.

На практике используются и другие критерии, например критерий постоянства модуля информационных символов (Constant Modulus, CM) [45], часто применяемый при адаптивной обработке сигналов в системах цифровой связи. В основе этого критерия лежит минимизация функции ошибок между значением модуля (комплексной огибающей) выходного сигнала адаптивного фильтра и известным значением модуля (комплексной огибающей) информа-

ционных символов, возведенных в некоторую степень. Эта минимизация обеспечивает приближение комплексной огибающей выходного сигнала адаптивного фильтра к известному постоянному значению комплексной огибающей информационных символов. Поэтому данный критерий получил свое название не от названия целевой функции, а от названия требуемого конечного результата, т. е. значения огибающей выходного сигнала адаптивного фильтра, позволяющей корректно распознавать (обнаруживать) в этом сигнале принимаемые информационные символы.

Выбор квадратичных целевых функций в адаптивных фильтрах во многом обусловлен тем, что в результате их использования можно получать алгоритмы адаптивной фильтрации в виде рекуррентных вычислительных процедур, не содержащих логических операций, что отличает такие алгоритмы от вычислительных процедур оптимизации общего вида. Кроме того, эти функции являются унимодальными, что гарантирует сходимость алгоритмов адаптивной фильтрации на их основе к единственному оптимальному решению.

Строго говоря, первая MSE-функция является лишь удобным математическим понятием, так как для ее вычисления требуется наличие бесконечного объема данных, поскольку получение этой функции подразумевает усреднение по ансамблю реализаций наблюдаемых сигналов. На практике она применяется редко. MSE-функция используется, например, при анализе адаптивных фильтров или в оптимальной винеровской фильтрации, представляющей в основном теоретический интерес.

По словам Бернарда Уидроу (Bernard Widrow), автора LMS-алгоритма, винеровская фильтрация является лишь красивой теоретической задачей: «Я был знаком с теорией винеровской фильтрации в непрерывной и дискретной формах. Для построения фильтра Винера требуется знать автокорреляционную функцию входного сигнала и взаимную корреляционную функцию между входным и требуемым сигналами. Это замечательно, когда вы делаете домашнее упражнение, но что делать на практике, когда статистику входных сигналов никто вам не может предоставить? Все, что у вас есть, — это сами входные сигналы...» [46].

Целевые функции со второй по четвертую отличаются как сложностью реализации алгоритмов на их основе, так и характеристиками сходимости и остаточными ошибками этих алгоритмов в установившемся режиме. Так, квадрат мгновенной ошибки является самой простой с точки зрения реализации алгоритмов целевой функцией. Однако алгоритмы на основе этой функции характеризуются медленной сходимостью, поскольку это сильно упрощенная целевая функция. Целевая LS-функция обычно используется при обработке стационарных сигналов, а WLS — при обработке медленно меняющихся сигналов.