

АЛГОРИТМЫ
ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ
ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

Thomas H. Cormen
Charles E. Leiserson
Ronald L. Rivest
Clifford Stein

INTRODUCTION TO
ALGORITHMS
SECOND EDITION

The MIT Press
Cambridge, Massachusetts London, England

McGraw-Hill Book Company
Boston Burr Ridge, IL Dubuque, IA Madison, WI
New York San Francisco St. Louis Montréal Toronto

Томас Кормен
Чарльз Лейзерсон
Рональд Ривест
Клиффорд Штайн

АЛГОРИТМЫ

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ



Москва • Санкт-Петербург • Киев
2011

ББК 32.973.26-018.2.75
В24
УДК 681.3.07

Издательский дом “Вильямс”

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского канд. техн. наук *И.В. Красикова, Н.А. Ореховой, В.Н. Романова*

Под редакцией канд. техн. наук *И.В. Красикова*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом “Вильямс” по адресу:
info@williamspublishing.com, http://www.williamspublishing.com

Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн,
Клиффорд.

В24 Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. :
Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с. : ил. — Парал. тит. англ.
ISBN 978-5-8459-0857-5 (рус.)

Фундаментальный труд известных специалистов в области кибернетики достоин занять место на полке любого человека, чья деятельность так или иначе связана с информатикой и алгоритмами. Для профессионала эта книга может служить настольным справочником, для преподавателя — пособием для подготовки к лекциям и источником интересных нетривиальных задач, для студентов и аспирантов — отличным учебником. Каждый может найти в ней именно тот материал, который касается интересующей его темы, и изложенный именно с тем уровнем сложности и строгости, который требуется читателю.

Описание алгоритмов на естественном языке дополняется псевдокодом, который позволяет любому имеющему хотя бы начальные знания и опыт программирования, реализовать алгоритм на используемом им языке программирования. Строгий математический анализ и обилие теорем сопровождаются большим количеством иллюстраций, элементарными рассуждениями и простыми приближенными оценками. Широта охвата материала и степень строгости его изложения дают основания считать эту книгу одной из лучших книг, посвященных разработке и анализу алгоритмов.

ББК 32.973.26-018.2.75

Все названия программных продуктов являются зарегистрированными торговыми марками соответствующих фирм.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издательства MIT Press.

ISBN 978-5-8459-0857-5 (рус.)
ISBN 0-07-013151-1 (англ.)

© Издательский дом “Вильямс”, 2011
© MIT Press, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	30
Часть I. Основы	43
Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях	46
Глава 2. Приступаем к изучению	57
Глава 3. Рост функций	87
Глава 4. Рекуррентные соотношения	109
Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы	140
Часть II. Сортировка и порядковая статистика	173
Глава 6. Пирамидальная сортировка	178
Глава 7. Быстрая сортировка	198
Глава 8. Сортировка за линейное время	220
Глава 9. Медианы и порядковые статистики	240
Часть III. Структуры данных	255
Глава 10. Элементарные структуры данных	260
Глава 11. Хеш-таблицы	282
Глава 12. Бинарные деревья поиска	316
Глава 13. Красно-черные деревья	336
Глава 14. Расширение структур данных	365
Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа	383
Глава 15. Динамическое программирование	386
Глава 16. Жадные алгоритмы	442
Глава 17. Амортизационный анализ	482
Часть V. Сложные структуры данных	511
Глава 18. B-деревья	515
Глава 19. Биномиальные пирамиды	537

Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды	558
Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств	581
Часть VI. Алгоритмы для работы с графами	607
Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами	609
Глава 23. Минимальные остовные деревья	644
Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины	663
Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин	708
Глава 26. Задача о максимальном потоке	734
Часть VII. Избранные темы	795
Глава 27. Сортирующие сети	799
Глава 28. Работа с матрицами	823
Глава 29. Линейное программирование	869
Глава 30. Полиномы и быстрое преобразование Фурье	926
Глава 31. Теоретико-числовые алгоритмы	954
Глава 32. Поиск подстрок	1017
Глава 33. Вычислительная геометрия	1047
Глава 34. NP-полнота	1085
Глава 35. Приближенные алгоритмы	1151
Часть VIII. Приложения: математические основы	1189
Приложение А. Ряды	1191
Приложение Б. Множества и прочие искусства	1202
Приложение В. Комбинаторика и теория вероятности	1226
Библиография	1257
Предметный указатель	1277

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	30
Часть I. Основы	43
Введение	44
Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях	46
1.1 Алгоритмы	46
Какие задачи решаются с помощью алгоритмов?	47
Структуры данных	50
Методические указания	50
Сложные задачи	51
Упражнения	52
1.2 Алгоритмы как технология	52
Эффективность	52
Алгоритмы и другие технологии	54
Упражнения	55
Задачи	55
Заключительные замечания	56
Глава 2. Приступаем к изучению	57
2.1 Сортировка вставкой	57
Инварианты цикла и корректность сортировки вставкой	59
Соглашения, принятые при составлении псевдокода	61
Упражнения	63
2.2 Анализ алгоритмов	64
Анализ алгоритма, работающего по методу вставок	66

	Наихудшее и среднее время работы	69
	Порядок возрастания	70
	Упражнения	71
2.3	Разработка алгоритмов	71
2.3.1	Метод декомпозиции	72
2.3.2	Анализ алгоритмов, основанных на принципе “разделяй и властвуй”	78
	Анализ алгоритма сортировки слиянием	78
	Упражнения	81
	Задачи	83
	Заключительные замечания	86
Глава 3. Рост функций		87
3.1	Асимптотические обозначения	88
	Θ-обозначения	88
	O-обозначения	91
	Ω-обозначения	92
	Асимптотические обозначения в уравнениях и неравенствах	93
	o-обозначения	94
	ω-обозначения	95
	Сравнение функций	96
	Упражнения	97
3.2	Стандартные обозначения и часто встречающиеся функции	98
	Монотонность	98
	Округление в большую и меньшую сторону	98
	Модульная арифметика	98
	Полиномы	99
	Показательные функции	99
	Логарифмы	100
	Факториалы	102
	Функциональная итерация	102
	Итерированная логарифмическая функция	103
	Числа Фибоначчи	103
	Упражнения	104
	Задачи	105
	Заключительные замечания	108
Глава 4. Рекуррентные соотношения		109
	Технические детали	110
4.1	Метод подстановки	111
	Как угадать решение	112

Тонкие нюансы	113
Остерегайтесь ошибок	114
Замена переменных	114
Упражнения	115
4.2 Метод деревьев рекурсии	115
Упражнения	120
4.3 Основной метод	121
Основная теорема	121
Использование основного метода	122
Упражнения	123
* 4.4 Доказательство основной теоремы	124
4.4.1 Доказательство теоремы для точных степеней	125
4.4.2 Учет округления чисел	130
Упражнения	133
Задачи	133
Заключительные замечания	138
Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы	140
5.1 Задача о найме сотрудника	140
Анализ наихудшего случая	142
Вероятностный анализ	142
Рандомизированные алгоритмы	143
Упражнения	144
5.2 Индикаторная случайная величина	144
Анализ задачи о найме сотрудника с помощью индикаторных случайных величин	146
Упражнения	148
5.3 Рандомизированные алгоритмы	149
Массивы, полученные в результате случайной перестановки	151
Упражнения	155
* 5.4 Вероятностный анализ и дальнейшее применение индикаторных случайных величин	156
5.4.1 Парадокс дней рождения	157
Анализ с помощью индикаторных случайных величин	158
5.4.2 Шары и урны	160
5.4.3 Последовательности выпадения орлов	161
5.4.4 Задача о найме сотрудника в оперативном режиме	165
Упражнения	167
Задачи	168
Заключительные замечания	171

Часть II. Сортировка и порядковая статистика	173
Введение	174
Глава 6. Пирамидальная сортировка	178
6.1 Пирамиды	179
Упражнения	181
6.2 Поддержка свойства пирамиды	182
Упражнения	184
6.3 Создание пирамиды	184
Упражнения	187
6.4 Алгоритм пирамидальной сортировки	187
Упражнения	188
6.5 Очереди с приоритетами	190
Упражнения	193
Задачи	194
Заключительные замечания	196
Глава 7. Быстрая сортировка	198
7.1 Описание быстрой сортировки	199
Разбиение массива	199
Упражнения	203
7.2 Производительность быстрой сортировки	203
Наихудшее разбиение	203
Наилучшее разбиение	204
Сбалансированное разбиение	204
Интуитивные рассуждения для среднего случая	205
Упражнения	207
7.3 Рандомизированная версия быстрой сортировки	208
Упражнения	209
7.4 Анализ быстрой сортировки	209
7.4.1 Анализ в наихудшем случае	209
7.4.2 Математическое ожидание времени работы	210
Время работы и сравнения	210
Упражнения	213
Задачи	214
Заключительные замечания	219
Глава 8. Сортировка за линейное время	220
8.1 Нижние оценки алгоритмов сортировки	221
Модель дерева решений	221
Нижняя оценка для наихудшего случая	222
Упражнения	223

8.2	Сортировка подсчетом	224
	Упражнения	226
8.3	Поразрядная сортировка	226
	Упражнения	230
8.4	Карманная сортировка	230
	Упражнения	234
	Задачи	234
	Заключительные замечания	238
Глава 9. Медианы и порядковые статистики		240
9.1	Минимум и максимум	241
	Одновременный поиск минимума и максимума	241
	Упражнения	242
9.2	Выбор в течение линейного ожидаемого времени	243
	Упражнения	247
9.3	Алгоритм выбора с линейным временем работы в наихудшем случае	247
	Упражнения	250
	Задачи	252
	Заключительные замечания	254
Часть III. Структуры данных		255
	Введение	256
Глава 10. Элементарные структуры данных		260
10.1	Стеки и очереди	260
	Стеки	260
	Очереди	262
	Упражнения	263
10.2	Связанные списки	264
	Поиск в связанном списке	265
	Вставка в связанный список	265
	Удаление из связанного списка	266
	Ограничители	266
	Упражнения	268
10.3	Реализация указателей и объектов	269
	Представление объектов с помощью нескольких массивов	269
	Представление объектов с помощью одного массива	270
	Выделение и освобождение памяти	271
	Упражнения	273
10.4	Представление корневых деревьев	274
	Бинарные деревья	274

Корневые деревья с произвольным ветвлением	275
Другие представления деревьев	276
Упражнения	276
Задачи	277
Заключительные замечания	280
Глава 11. Хеш-таблицы	282
11.1 Таблицы с прямой адресацией	283
Упражнения	284
11.2 Хеш-таблицы	285
Разрешение коллизий при помощи цепочек	286
Анализ хеширования с цепочками	288
Упражнения	290
11.3 Хеш-функции	291
Чем определяется качество хеш-функции	291
Интерпретация ключей как целых неотрицательных чисел	292
11.3.1 Метод деления	292
11.3.2 Метод умножения	293
* 11.3.3 Универсальное хеширование	294
Построение универсального множества хеш-функций	297
Упражнения	298
11.4 Открытая адресация	300
Линейное исследование	302
Квадратичное исследование	303
Двойное хеширование	303
Анализ хеширования с открытой адресацией	305
Упражнения	307
* 11.5 Идеальное хеширование	308
Упражнения	312
Задачи	313
Заключительные замечания	315
Глава 12. Бинарные деревья поиска	316
12.1 Что такое бинарное дерево поиска	317
Упражнения	319
12.2 Работа с бинарным деревом поиска	319
Поиск	320
Поиск минимума и максимума	321
Предшествующий и последующий элементы	321
Упражнения	323
12.3 Вставка и удаление	324
Вставка	324

Удаление	325
Упражнения	327
★ 12.4 Случайное построение бинарных деревьев поиска	328
Упражнения	331
Задачи	332
Заключительные замечания	335
Глава 13. Красно-черные деревья	336
13.1 Свойства красно-черных деревьев	336
Упражнения	339
13.2 Повороты	340
Упражнения	341
13.3 Вставка	342
Анализ	350
Упражнения	350
13.4 Удаление	351
Анализ	356
Упражнения	356
Задачи	357
Заключительные замечания	364
Глава 14. Расширение структур данных	365
14.1 Динамические порядковые статистики	366
Выборка элемента с заданным рангом	367
Определение ранга элемента	368
Поддержка размера поддеревьев	369
Упражнения	371
14.2 Расширение структур данных	372
Расширение красно-черных деревьев	373
Упражнения	374
14.3 Деревья отрезков	375
Упражнения	380
Задачи	381
Заключительные замечания	382
Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа	383
Введение	384
Глава 15. Динамическое программирование	386
15.1 Расписание работы конвейера	387
Первый этап: структура самой быстрой сборки	389
Второй этап: рекурсивное решение	391

Третий этап: вычисление минимальных промежутков времени	393
Четвертый этап: построение самого быстрого пути	394
Упражнения	395
15.2 Перемножение цепочки матриц	395
Подсчет количества способов расстановки скобок	397
Первый этап: структура оптимальной расстановки скобок	398
Второй этап: рекурсивное решение	399
Третий этап: вычисление оптимальной стоимости	400
Четвертый этап: конструирование оптимального решения	403
Упражнения	404
15.3 Элементы динамического программирования	404
Оптимальная подструктура	405
Перекрытие вспомогательных задач	411
Построение оптимального решения	414
Запоминание	414
Упражнения	417
15.4 Самая длинная общая подпоследовательность	418
Этап 1: характеристика самой длинной общей подпоследовательности	419
Этап 2: рекурсивное решение	421
Этап 3: вычисление длины самой длинной общей подпоследовательности	422
Этап 4: построение самой длинной общей подпоследовательности	423
Улучшение кода	424
Упражнения	425
15.5 Оптимальные бинарные деревья поиска	425
Этап 1: структура оптимального бинарного дерева поиска	429
Этап 2: рекурсивное решение	430
Этап 3: вычисление математического ожидания стоимости поиска в оптимальном бинарном дереве поиска	431
Упражнения	433
Задачи	434
Заключительные замечания	440
Глава 16. Жадные алгоритмы	442
16.1 Задача о выборе процессов	443
Оптимальная подструктура задачи о выборе процессов	444
Рекурсивное решение	446

Преобразование решения динамического программирования в жадное решение	446
Рекурсивный жадный алгоритм	449
Итерационный жадный алгоритм	451
Упражнения	452
16.2 Элементы жадной стратегии	453
Свойство жадного выбора	454
Оптимальная подструктура	455
Сравнение жадных алгоритмов и динамического программирования	456
Упражнения	458
16.3 Коды Хаффмана	459
Префиксные коды	460
Построение кода Хаффмана	462
Корректность алгоритма Хаффмана	464
Упражнения	466
★ 16.4 Теоретические основы жадных методов	467
Матроиды	467
Жадные алгоритмы на взвешенном матроиде	470
Упражнения	474
★ 16.5 Планирование заданий	474
Упражнения	478
Задачи	478
Заключительные замечания	481
Глава 17. Амортизационный анализ	482
17.1 Групповой анализ	483
Стековые операции	483
Приращение показаний бинарного счетчика	485
Упражнения	487
17.2 Метод бухгалтерского учета	487
Стековые операции	489
Приращение показаний бинарного счетчика	490
Упражнения	490
17.3 Метод потенциалов	491
Стековые операции	492
Увеличение показаний бинарного счетчика	493
Упражнения	494
17.4 Динамические таблицы	495
17.4.1 Расширение таблицы	496
17.4.2 Расширение и сжатие таблицы	499

Упражнения	504
Задачи	505
Заключительные замечания	510
Часть V. Сложные структуры данных	511
Введение	512
Глава 18. В-деревья	515
Структуры данных во вторичной памяти	516
18.1 Определение В-деревьев	519
Высота В-деревя	521
Упражнения	522
18.2 Основные операции с В-деревьями	522
Поиск в В-дереве	522
Создание пустого В-деревя	523
Вставка ключа в В-деревя	524
Упражнения	528
18.3 Удаление ключа из В-деревя	530
Упражнения	533
Задачи	533
Заключительные замечания	536
Глава 19. Биномиальные пирамиды	537
19.1 Биномиальные деревья и биномиальные пирамиды	539
19.1.1 Биномиальные деревья	539
19.1.2 Биномиальные пирамиды	541
Упражнения	543
19.2 Операции над биномиальными пирамидами	544
Создание новой биномиальной пирамиды	544
Поиск минимального ключа	544
Слияние двух биномиальных пирамид	545
Вставка узла	550
Извлечение вершины с минимальным ключом	551
Уменьшение ключа	552
Удаление ключа	554
Упражнения	554
Задачи	555
Заключительные замечания	557

Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды	558
20.1 Структура фибоначчиевых пирамид	559
Потенциальная функция	561
Максимальная степень	562
20.2 Операции над сливаемыми пирамидами	562
Создание новой фибоначчиевой пирамиды	563
Вставка узла	563
Поиск минимального узла	564
Объединение двух фибоначчиевых пирамид	564
Извлечение минимального узла	565
Упражнения	571
20.3 Уменьшение ключа и удаление узла	571
Уменьшение ключа	571
Удаление узла	575
Упражнения	575
20.4 Оценка максимальной степени	575
Упражнения	578
Задачи	578
Заключительные замечания	579
Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств	581
21.1 Операции над непересекающимися множествами	582
Приложение структур данных для непересекающихся множеств	583
Упражнения	584
21.2 Представление непересекающихся множеств с помощью связанных списков	585
Простая реализация объединения	586
Весовая эвристика	587
Упражнения	588
21.3 Лес непересекающихся множеств	589
Эвристики для повышения эффективности	589
Псевдокоды	590
Влияние эвристик на время работы	592
Упражнения	592
* 21.4 Анализ объединения по рангу со сжатием пути	592
Очень быстро и очень медленно растущая функция	593
Свойства рангов	594
Доказательство границы времени работы	595
Потенциальная функция	596

Изменения потенциала и амортизированная стоимость операций	598
Упражнения	601
Задачи	601
Заключительные замечания	605
Часть VI. Алгоритмы для работы с графами	607
Введение	608
Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами	609
22.1 Представление графов	609
Упражнения	612
22.2 Поиск в ширину	613
Анализ	616
Кратчайшие пути	617
Деревья поиска в ширину	620
Упражнения	621
22.3 Поиск в глубину	622
Свойства поиска в глубину	626
Классификация ребер	628
Упражнения	630
22.4 Топологическая сортировка	632
Упражнения	634
22.5 Сильно связанные компоненты	635
Упражнения	640
Задачи	641
Заключительные замечания	643
Глава 23. Минимальные остовные деревья	644
23.1 Построение минимального остовного дерева	645
Упражнения	649
23.2 Алгоритмы Крускала и Прима	651
Алгоритм Крускала	651
Алгоритм Прима	653
Упражнения	656
Задачи	658
Заключительные замечания	661
Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины	663
Варианты	664
Оптимальная структура задачи о кратчайшем пути	665
Ребра с отрицательным весом	666

Циклы	667
Представление кратчайших путей	668
Ослабление	669
Свойства кратчайших путей и ослабления	671
Краткое содержание главы	672
24.1 Алгоритм Беллмана-Форда	672
Упражнения	676
24.2 Кратчайшие пути из одной вершины в ориентированных ациклических графах	677
Упражнения	679
24.3 Алгоритм Дейкстры	680
Анализ	684
Упражнения	686
24.4 Разностные ограничения и кратчайшие пути	687
Линейное программирование	687
Системы разностных ограничений	688
Графы ограничений	690
Решение систем разностных ограничений	692
Упражнения	692
24.5 Доказательства свойств кратчайших путей	694
Неравенство треугольника	694
Влияние ослабления на оценки кратчайшего пути	695
Ослабление и деревья кратчайших путей	697
Упражнения	700
Задачи	702
Заключительные замечания	706
Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин	708
Краткое содержание главы	710
25.1 Задача о кратчайших путях и умножение матриц	711
Структура кратчайшего пути	711
Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин	712
Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке	712
Улучшение времени работы	714
Упражнения	716
25.2 Алгоритм Флойда-Варшалла	718
Структура кратчайшего пути	718
Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин	719

Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке	720
Построение кратчайшего пути	720
Транзитивное замыкание ориентированного графа	722
Упражнения	724
25.3 Алгоритм Джонсона для разреженных графов	726
Сохранение кратчайших путей	726
Генерация неотрицательных весов путем их изменения	728
Вычисление кратчайших путей между всеми парами вершин	728
Упражнения	730
Задачи	731
Заключительные замечания	732
Глава 26. Задача о максимальном потоке	734
26.1 Транспортные сети	735
Транспортные сети и потоки	735
Пример потока	737
Сети с несколькими источниками и стоками	739
Как работать с потоками	740
Упражнения	741
26.2 Метод Форда-Фалкерсона	742
Остаточные сети	743
Увеличивающие пути	745
Разрезы транспортных сетей	746
Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона	749
Анализ метода Форда-Фалкерсона	750
Алгоритм Эдмондса-Карпа	752
Упражнения	755
26.3 Максимальное паросочетание	756
Задача поиска максимального паросочетания в двудольном графе	757
Поиск максимального паросочетания в двудольном графе	758
Упражнения	761
* 26.4 Алгоритмы проталкивания предпотока	761
Интуитивные соображения	762
Основные операции	764
Операция проталкивания	764
Операция подъема	766
Универсальный алгоритм	766
Корректность метода проталкивания предпотока	768