

АЛГОРИТМЫ
ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ
ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

Thomas H. Cormen
Charles E. Leiserson
Ronald L. Rivest
Clifford Stein

INTRODUCTION TO
ALGORITHMS
SECOND EDITION

The MIT Press
Cambridge, Massachusetts London, England

McGraw-Hill Book Company
Boston Burr Ridge, IL Dubuque, IA Madison, WI
New York San Francisco St. Louis Montréal Toronto

Томас Кормен
Чарльз Лейзерсон
Рональд Ривест
Клиффорд Штайн

АЛГОРИТМЫ

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ



Москва • Санкт-Петербург • Киев
2011

ББК 32.973.26-018.2.75
В24
УДК 681.3.07

Издательский дом “Вильямс”

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского канд. техн. наук *И.В. Красикова, Н.А. Ореховой, В.Н. Романова*

Под редакцией канд. техн. наук *И.В. Красикова*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом “Вильямс” по адресу:
info@williamspublishing.com, http://www.williamspublishing.com

Кормен, Томас Х., Лейзерсон, Чарльз И., Ривест, Рональд Л., Штайн,
Клиффорд.

В24 Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. :
Издательский дом “Вильямс”, 2011. — 1296 с. : ил. — Парал. тит. англ.
ISBN 978-5-8459-0857-5 (рус.)

Фундаментальный труд известных специалистов в области кибернетики достоин занять место на полке любого человека, чья деятельность так или иначе связана с информатикой и алгоритмами. Для профессионала эта книга может служить настольным справочником, для преподавателя — пособием для подготовки к лекциям и источником интересных нетривиальных задач, для студентов и аспирантов — отличным учебником. Каждый может найти в ней именно тот материал, который касается интересующей его темы, и изложенный именно с тем уровнем сложности и строгости, который требуется читателю.

Описание алгоритмов на естественном языке дополняется псевдокодом, который позволяет любому имеющему хотя бы начальные знания и опыт программирования, реализовать алгоритм на используемом им языке программирования. Строгий математический анализ и обилие теорем сопровождаются большим количеством иллюстраций, элементарными рассуждениями и простыми приближенными оценками. Широта охвата материала и степень строгости его изложения дают основания считать эту книгу одной из лучших книг, посвященных разработке и анализу алгоритмов.

ББК 32.973.26-018.2.75

Все названия программных продуктов являются зарегистрированными торговыми марками соответствующих фирм.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издательства MIT Press.

ISBN 978-5-8459-0857-5 (рус.)
ISBN 0-07-013151-1 (англ.)

© Издательский дом “Вильямс”, 2011
© MIT Press, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Введение | 30 |
| Часть I. Основы | 43 |
| Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях | 46 |
| Глава 2. Приступаем к изучению | 57 |
| Глава 3. Рост функций | 87 |
| Глава 4. Рекуррентные соотношения | 109 |
| Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы | 140 |
| Часть II. Сортировка и порядковая статистика | 173 |
| Глава 6. Пирамидальная сортировка | 178 |
| Глава 7. Быстрая сортировка | 198 |
| Глава 8. Сортировка за линейное время | 220 |
| Глава 9. Медианы и порядковые статистики | 240 |
| Часть III. Структуры данных | 255 |
| Глава 10. Элементарные структуры данных | 260 |
| Глава 11. Хеш-таблицы | 282 |
| Глава 12. Бинарные деревья поиска | 316 |
| Глава 13. Красно-черные деревья | 336 |
| Глава 14. Расширение структур данных | 365 |
| Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа | 383 |
| Глава 15. Динамическое программирование | 386 |
| Глава 16. Жадные алгоритмы | 442 |
| Глава 17. Амортизационный анализ | 482 |
| Часть V. Сложные структуры данных | 511 |
| Глава 18. B-деревья | 515 |
| Глава 19. Биномиальные пирамиды | 537 |

| | |
|--|------|
| Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды | 558 |
| Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств | 581 |
| Часть VI. Алгоритмы для работы с графами | 607 |
| Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами | 609 |
| Глава 23. Минимальные остовные деревья | 644 |
| Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины | 663 |
| Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин | 708 |
| Глава 26. Задача о максимальном потоке | 734 |
| Часть VII. Избранные темы | 795 |
| Глава 27. Сортирующие сети | 799 |
| Глава 28. Работа с матрицами | 823 |
| Глава 29. Линейное программирование | 869 |
| Глава 30. Полиномы и быстрое преобразование Фурье | 926 |
| Глава 31. Теоретико-числовые алгоритмы | 954 |
| Глава 32. Поиск подстрок | 1017 |
| Глава 33. Вычислительная геометрия | 1047 |
| Глава 34. NP-полнота | 1085 |
| Глава 35. Приближенные алгоритмы | 1151 |
| Часть VIII. Приложения: математические основы | 1189 |
| Приложение А. Ряды | 1191 |
| Приложение Б. Множества и прочие художества | 1202 |
| Приложение В. Комбинаторика и теория вероятности | 1226 |
| Библиография | 1257 |
| Предметный указатель | 1277 |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 30 |
| Часть I. Основы | 43 |
| Введение | 44 |
| Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях | 46 |
| 1.1 Алгоритмы | 46 |
| Какие задачи решаются с помощью алгоритмов? | 47 |
| Структуры данных | 50 |
| Методические указания | 50 |
| Сложные задачи | 51 |
| Упражнения | 52 |
| 1.2 Алгоритмы как технология | 52 |
| Эффективность | 52 |
| Алгоритмы и другие технологии | 54 |
| Упражнения | 55 |
| Задачи | 55 |
| Заключительные замечания | 56 |
| Глава 2. Приступаем к изучению | 57 |
| 2.1 Сортировка вставкой | 57 |
| Инварианты цикла и корректность сортировки вставкой | 59 |
| Соглашения, принятые при составлении псевдокода | 61 |
| Упражнения | 63 |
| 2.2 Анализ алгоритмов | 64 |
| Анализ алгоритма, работающего по методу вставок | 66 |

| | | |
|--|--|-----|
| | Наихудшее и среднее время работы | 69 |
| | Порядок возрастания | 70 |
| | Упражнения | 71 |
| 2.3 | Разработка алгоритмов | 71 |
| 2.3.1 | Метод декомпозиции | 72 |
| 2.3.2 | Анализ алгоритмов, основанных на принципе “разделяй и властвуй” | 78 |
| | Анализ алгоритма сортировки слиянием | 78 |
| | Упражнения | 81 |
| | Задачи | 83 |
| | Заключительные замечания | 86 |
| Глава 3. Рост функций | | 87 |
| 3.1 | Асимптотические обозначения | 88 |
| | Θ-обозначения | 88 |
| | O-обозначения | 91 |
| | Ω-обозначения | 92 |
| | Асимптотические обозначения в уравнениях и неравенствах | 93 |
| | o-обозначения | 94 |
| | ω-обозначения | 95 |
| | Сравнение функций | 96 |
| | Упражнения | 97 |
| 3.2 | Стандартные обозначения и часто встречающиеся функции | 98 |
| | Монотонность | 98 |
| | Округление в большую и меньшую сторону | 98 |
| | Модульная арифметика | 98 |
| | Полиномы | 99 |
| | Показательные функции | 99 |
| | Логарифмы | 100 |
| | Факториалы | 102 |
| | Функциональная итерация | 102 |
| | Итерированная логарифмическая функция | 103 |
| | Числа Фибоначчи | 103 |
| | Упражнения | 104 |
| | Задачи | 105 |
| | Заключительные замечания | 108 |
| Глава 4. Рекуррентные соотношения | | 109 |
| | Технические детали | 110 |
| 4.1 | Метод подстановки | 111 |
| | Как угадать решение | 112 |

| | |
|---|------------|
| Тонкие нюансы | 113 |
| Остерегайтесь ошибок | 114 |
| Замена переменных | 114 |
| Упражнения | 115 |
| 4.2 Метод деревьев рекурсии | 115 |
| Упражнения | 120 |
| 4.3 Основной метод | 121 |
| Основная теорема | 121 |
| Использование основного метода | 122 |
| Упражнения | 123 |
| * 4.4 Доказательство основной теоремы | 124 |
| 4.4.1 Доказательство теоремы для точных степеней | 125 |
| 4.4.2 Учет округления чисел | 130 |
| Упражнения | 133 |
| Задачи | 133 |
| Заключительные замечания | 138 |
| Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы | 140 |
| 5.1 Задача о найме сотрудника | 140 |
| Анализ наихудшего случая | 142 |
| Вероятностный анализ | 142 |
| Рандомизированные алгоритмы | 143 |
| Упражнения | 144 |
| 5.2 Индикаторная случайная величина | 144 |
| Анализ задачи о найме сотрудника с помощью индикаторных случайных величин | 146 |
| Упражнения | 148 |
| 5.3 Рандомизированные алгоритмы | 149 |
| Массивы, полученные в результате случайной перестановки | 151 |
| Упражнения | 155 |
| * 5.4 Вероятностный анализ и дальнейшее применение индикаторных случайных величин | 156 |
| 5.4.1 Парадокс дней рождения | 157 |
| Анализ с помощью индикаторных случайных величин | 158 |
| 5.4.2 Шары и урны | 160 |
| 5.4.3 Последовательности выпадения орлов | 161 |
| 5.4.4 Задача о найме сотрудника в оперативном режиме | 165 |
| Упражнения | 167 |
| Задачи | 168 |
| Заключительные замечания | 171 |

| | |
|---|-----|
| Часть II. Сортировка и порядковая статистика | 173 |
| Введение | 174 |
| Глава 6. Пирамидальная сортировка | 178 |
| 6.1 Пирамиды | 179 |
| Упражнения | 181 |
| 6.2 Поддержка свойства пирамиды | 182 |
| Упражнения | 184 |
| 6.3 Создание пирамиды | 184 |
| Упражнения | 187 |
| 6.4 Алгоритм пирамидальной сортировки | 187 |
| Упражнения | 188 |
| 6.5 Очереди с приоритетами | 190 |
| Упражнения | 193 |
| Задачи | 194 |
| Заключительные замечания | 196 |
| Глава 7. Быстрая сортировка | 198 |
| 7.1 Описание быстрой сортировки | 199 |
| Разбиение массива | 199 |
| Упражнения | 203 |
| 7.2 Производительность быстрой сортировки | 203 |
| Наихудшее разбиение | 203 |
| Наилучшее разбиение | 204 |
| Сбалансированное разбиение | 204 |
| Интуитивные рассуждения для среднего случая | 205 |
| Упражнения | 207 |
| 7.3 Рандомизированная версия быстрой сортировки | 208 |
| Упражнения | 209 |
| 7.4 Анализ быстрой сортировки | 209 |
| 7.4.1 Анализ в наихудшем случае | 209 |
| 7.4.2 Математическое ожидание времени работы | 210 |
| Время работы и сравнения | 210 |
| Упражнения | 213 |
| Задачи | 214 |
| Заключительные замечания | 219 |
| Глава 8. Сортировка за линейное время | 220 |
| 8.1 Нижние оценки алгоритмов сортировки | 221 |
| Модель дерева решений | 221 |
| Нижняя оценка для наихудшего случая | 222 |
| Упражнения | 223 |

| | | |
|---|---|-----|
| 8.2 | Сортировка подсчетом | 224 |
| | Упражнения | 226 |
| 8.3 | Поразрядная сортировка | 226 |
| | Упражнения | 230 |
| 8.4 | Карманная сортировка | 230 |
| | Упражнения | 234 |
| | Задачи | 234 |
| | Заключительные замечания | 238 |
| Глава 9. Медианы и порядковые статистики | | 240 |
| 9.1 | Минимум и максимум | 241 |
| | Одновременный поиск минимума и максимума | 241 |
| | Упражнения | 242 |
| 9.2 | Выбор в течение линейного ожидаемого времени | 243 |
| | Упражнения | 247 |
| 9.3 | Алгоритм выбора с линейным временем работы в наихудшем случае | 247 |
| | Упражнения | 250 |
| | Задачи | 252 |
| | Заключительные замечания | 254 |
| Часть III. Структуры данных | | 255 |
| | Введение | 256 |
| Глава 10. Элементарные структуры данных | | 260 |
| 10.1 | Стеки и очереди | 260 |
| | Стеки | 260 |
| | Очереди | 262 |
| | Упражнения | 263 |
| 10.2 | Связанные списки | 264 |
| | Поиск в связанном списке | 265 |
| | Вставка в связанный список | 265 |
| | Удаление из связанного списка | 266 |
| | Ограничители | 266 |
| | Упражнения | 268 |
| 10.3 | Реализация указателей и объектов | 269 |
| | Представление объектов с помощью нескольких массивов | 269 |
| | Представление объектов с помощью одного массива | 270 |
| | Выделение и освобождение памяти | 271 |
| | Упражнения | 273 |
| 10.4 | Представление корневых деревьев | 274 |
| | Бинарные деревья | 274 |

| | |
|--|------------|
| Корневые деревья с произвольным ветвлением | 275 |
| Другие представления деревьев | 276 |
| Упражнения | 276 |
| Задачи | 277 |
| Заключительные замечания | 280 |
| Глава 11. Хеш-таблицы | 282 |
| 11.1 Таблицы с прямой адресацией | 283 |
| Упражнения | 284 |
| 11.2 Хеш-таблицы | 285 |
| Разрешение коллизий при помощи цепочек | 286 |
| Анализ хеширования с цепочками | 288 |
| Упражнения | 290 |
| 11.3 Хеш-функции | 291 |
| Чем определяется качество хеш-функции | 291 |
| Интерпретация ключей как целых неотрицательных чисел | 292 |
| 11.3.1 Метод деления | 292 |
| 11.3.2 Метод умножения | 293 |
| * 11.3.3 Универсальное хеширование | 294 |
| Построение универсального множества хеш-функций | 297 |
| Упражнения | 298 |
| 11.4 Открытая адресация | 300 |
| Линейное исследование | 302 |
| Квадратичное исследование | 303 |
| Двойное хеширование | 303 |
| Анализ хеширования с открытой адресацией | 305 |
| Упражнения | 307 |
| * 11.5 Идеальное хеширование | 308 |
| Упражнения | 312 |
| Задачи | 313 |
| Заключительные замечания | 315 |
| Глава 12. Бинарные деревья поиска | 316 |
| 12.1 Что такое бинарное дерево поиска | 317 |
| Упражнения | 319 |
| 12.2 Работа с бинарным деревом поиска | 319 |
| Поиск | 320 |
| Поиск минимума и максимума | 321 |
| Предшествующий и последующий элементы | 321 |
| Упражнения | 323 |
| 12.3 Вставка и удаление | 324 |
| Вставка | 324 |

| | |
|--|------------|
| Удаление | 325 |
| Упражнения | 327 |
| ★ 12.4 Случайное построение бинарных деревьев поиска | 328 |
| Упражнения | 331 |
| Задачи | 332 |
| Заключительные замечания | 335 |
| Глава 13. Красно-черные деревья | 336 |
| 13.1 Свойства красно-черных деревьев | 336 |
| Упражнения | 339 |
| 13.2 Повороты | 340 |
| Упражнения | 341 |
| 13.3 Вставка | 342 |
| Анализ | 350 |
| Упражнения | 350 |
| 13.4 Удаление | 351 |
| Анализ | 356 |
| Упражнения | 356 |
| Задачи | 357 |
| Заключительные замечания | 364 |
| Глава 14. Расширение структур данных | 365 |
| 14.1 Динамические порядковые статистики | 366 |
| Выборка элемента с заданным рангом | 367 |
| Определение ранга элемента | 368 |
| Поддержка размера поддеревьев | 369 |
| Упражнения | 371 |
| 14.2 Расширение структур данных | 372 |
| Расширение красно-черных деревьев | 373 |
| Упражнения | 374 |
| 14.3 Деревья отрезков | 375 |
| Упражнения | 380 |
| Задачи | 381 |
| Заключительные замечания | 382 |
| Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа | 383 |
| Введение | 384 |
| Глава 15. Динамическое программирование | 386 |
| 15.1 Расписание работы конвейера | 387 |
| Первый этап: структура самой быстрой сборки | 389 |
| Второй этап: рекурсивное решение | 391 |

| | |
|---|-----|
| Третий этап: вычисление минимальных промежутков времени | 393 |
| Четвертый этап: построение самого быстрого пути | 394 |
| Упражнения | 395 |
| 15.2 Перемножение цепочки матриц | 395 |
| Подсчет количества способов расстановки скобок | 397 |
| Первый этап: структура оптимальной расстановки скобок | 398 |
| Второй этап: рекурсивное решение | 399 |
| Третий этап: вычисление оптимальной стоимости | 400 |
| Четвертый этап: конструирование оптимального решения | 403 |
| Упражнения | 404 |
| 15.3 Элементы динамического программирования | 404 |
| Оптимальная подструктура | 405 |
| Перекрытие вспомогательных задач | 411 |
| Построение оптимального решения | 414 |
| Запоминание | 414 |
| Упражнения | 417 |
| 15.4 Самая длинная общая подпоследовательность | 418 |
| Этап 1: характеристика самой длинной общей подпоследовательности | 419 |
| Этап 2: рекурсивное решение | 421 |
| Этап 3: вычисление длины самой длинной общей подпоследовательности | 422 |
| Этап 4: построение самой длинной общей подпоследовательности | 423 |
| Улучшение кода | 424 |
| Упражнения | 425 |
| 15.5 Оптимальные бинарные деревья поиска | 425 |
| Этап 1: структура оптимального бинарного дерева поиска | 429 |
| Этап 2: рекурсивное решение | 430 |
| Этап 3: вычисление математического ожидания стоимости поиска в оптимальном бинарном дереве поиска | 431 |
| Упражнения | 433 |
| Задачи | 434 |
| Заключительные замечания | 440 |
| Глава 16. Жадные алгоритмы | 442 |
| 16.1 Задача о выборе процессов | 443 |
| Оптимальная подструктура задачи о выборе процессов | 444 |
| Рекурсивное решение | 446 |

| | |
|--|------------|
| Преобразование решения динамического программирования в жадное решение | 446 |
| Рекурсивный жадный алгоритм | 449 |
| Итерационный жадный алгоритм | 451 |
| Упражнения | 452 |
| 16.2 Элементы жадной стратегии | 453 |
| Свойство жадного выбора | 454 |
| Оптимальная подструктура | 455 |
| Сравнение жадных алгоритмов и динамического программирования | 456 |
| Упражнения | 458 |
| 16.3 Коды Хаффмана | 459 |
| Префиксные коды | 460 |
| Построение кода Хаффмана | 462 |
| Корректность алгоритма Хаффмана | 464 |
| Упражнения | 466 |
| ★ 16.4 Теоретические основы жадных методов | 467 |
| Матроиды | 467 |
| Жадные алгоритмы на взвешенном матроиде | 470 |
| Упражнения | 474 |
| ★ 16.5 Планирование заданий | 474 |
| Упражнения | 478 |
| Задачи | 478 |
| Заключительные замечания | 481 |
| Глава 17. Амортизационный анализ | 482 |
| 17.1 Групповой анализ | 483 |
| Стековые операции | 483 |
| Приращение показаний бинарного счетчика | 485 |
| Упражнения | 487 |
| 17.2 Метод бухгалтерского учета | 487 |
| Стековые операции | 489 |
| Приращение показаний бинарного счетчика | 490 |
| Упражнения | 490 |
| 17.3 Метод потенциалов | 491 |
| Стековые операции | 492 |
| Увеличение показаний бинарного счетчика | 493 |
| Упражнения | 494 |
| 17.4 Динамические таблицы | 495 |
| 17.4.1 Расширение таблицы | 496 |
| 17.4.2 Расширение и сжатие таблицы | 499 |

| | |
|---|------------|
| Упражнения | 504 |
| Задачи | 505 |
| Заключительные замечания | 510 |
| Часть V. Сложные структуры данных | 511 |
| Введение | 512 |
| Глава 18. В-деревья | 515 |
| Структуры данных во вторичной памяти | 516 |
| 18.1 Определение В-деревьев | 519 |
| Высота В-деревя | 521 |
| Упражнения | 522 |
| 18.2 Основные операции с В-деревьями | 522 |
| Поиск в В-дереве | 522 |
| Создание пустого В-деревя | 523 |
| Вставка ключа в В-деревя | 524 |
| Упражнения | 528 |
| 18.3 Удаление ключа из В-деревя | 530 |
| Упражнения | 533 |
| Задачи | 533 |
| Заключительные замечания | 536 |
| Глава 19. Биномиальные пирамиды | 537 |
| 19.1 Биномиальные деревья и биномиальные пирамиды | 539 |
| 19.1.1 Биномиальные деревья | 539 |
| 19.1.2 Биномиальные пирамиды | 541 |
| Упражнения | 543 |
| 19.2 Операции над биномиальными пирамидами | 544 |
| Создание новой биномиальной пирамиды | 544 |
| Поиск минимального ключа | 544 |
| Слияние двух биномиальных пирамид | 545 |
| Вставка узла | 550 |
| Извлечение вершины с минимальным ключом | 551 |
| Уменьшение ключа | 552 |
| Удаление ключа | 554 |
| Упражнения | 554 |
| Задачи | 555 |
| Заключительные замечания | 557 |

| | |
|--|-----|
| Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды | 558 |
| 20.1 Структура фибоначчиевых пирамид | 559 |
| Потенциальная функция | 561 |
| Максимальная степень | 562 |
| 20.2 Операции над сливаемыми пирамидами | 562 |
| Создание новой фибоначчиевой пирамиды | 563 |
| Вставка узла | 563 |
| Поиск минимального узла | 564 |
| Объединение двух фибоначчиевых пирамид | 564 |
| Извлечение минимального узла | 565 |
| Упражнения | 571 |
| 20.3 Уменьшение ключа и удаление узла | 571 |
| Уменьшение ключа | 571 |
| Удаление узла | 575 |
| Упражнения | 575 |
| 20.4 Оценка максимальной степени | 575 |
| Упражнения | 578 |
| Задачи | 578 |
| Заключительные замечания | 579 |
| Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств | 581 |
| 21.1 Операции над непересекающимися множествами | 582 |
| Приложение структур данных для непересекающихся множеств | 583 |
| Упражнения | 584 |
| 21.2 Представление непересекающихся множеств с помощью связанных списков | 585 |
| Простая реализация объединения | 586 |
| Весовая эвристика | 587 |
| Упражнения | 588 |
| 21.3 Лес непересекающихся множеств | 589 |
| Эвристики для повышения эффективности | 589 |
| Псевдокоды | 590 |
| Влияние эвристик на время работы | 592 |
| Упражнения | 592 |
| * 21.4 Анализ объединения по рангу со сжатием пути | 592 |
| Очень быстро и очень медленно растущая функция | 593 |
| Свойства рангов | 594 |
| Доказательство границы времени работы | 595 |
| Потенциальная функция | 596 |

| | |
|--|------------|
| Изменения потенциала и амортизированная стоимость операций | 598 |
| Упражнения | 601 |
| Задачи | 601 |
| Заключительные замечания | 605 |
| Часть VI. Алгоритмы для работы с графами | 607 |
| Введение | 608 |
| Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами | 609 |
| 22.1 Представление графов | 609 |
| Упражнения | 612 |
| 22.2 Поиск в ширину | 613 |
| Анализ | 616 |
| Кратчайшие пути | 617 |
| Деревья поиска в ширину | 620 |
| Упражнения | 621 |
| 22.3 Поиск в глубину | 622 |
| Свойства поиска в глубину | 626 |
| Классификация ребер | 628 |
| Упражнения | 630 |
| 22.4 Топологическая сортировка | 632 |
| Упражнения | 634 |
| 22.5 Сильно связанные компоненты | 635 |
| Упражнения | 640 |
| Задачи | 641 |
| Заключительные замечания | 643 |
| Глава 23. Минимальные остовные деревья | 644 |
| 23.1 Построение минимального остовного дерева | 645 |
| Упражнения | 649 |
| 23.2 Алгоритмы Крускала и Прима | 651 |
| Алгоритм Крускала | 651 |
| Алгоритм Прима | 653 |
| Упражнения | 656 |
| Задачи | 658 |
| Заключительные замечания | 661 |
| Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины | 663 |
| Варианты | 664 |
| Оптимальная структура задачи о кратчайшем пути | 665 |
| Ребра с отрицательным весом | 666 |

| | |
|---|------------|
| Циклы | 667 |
| Представление кратчайших путей | 668 |
| Ослабление | 669 |
| Свойства кратчайших путей и ослабления | 671 |
| Краткое содержание главы | 672 |
| 24.1 Алгоритм Беллмана-Форда | 672 |
| Упражнения | 676 |
| 24.2 Кратчайшие пути из одной вершины в ориентированных ациклических графах | 677 |
| Упражнения | 679 |
| 24.3 Алгоритм Дейкстры | 680 |
| Анализ | 684 |
| Упражнения | 686 |
| 24.4 Разностные ограничения и кратчайшие пути | 687 |
| Линейное программирование | 687 |
| Системы разностных ограничений | 688 |
| Графы ограничений | 690 |
| Решение систем разностных ограничений | 692 |
| Упражнения | 692 |
| 24.5 Доказательства свойств кратчайших путей | 694 |
| Неравенство треугольника | 694 |
| Влияние ослабления на оценки кратчайшего пути | 695 |
| Ослабление и деревья кратчайших путей | 697 |
| Упражнения | 700 |
| Задачи | 702 |
| Заключительные замечания | 706 |
| Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин | 708 |
| Краткое содержание главы | 710 |
| 25.1 Задача о кратчайших путях и умножение матриц | 711 |
| Структура кратчайшего пути | 711 |
| Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин | 712 |
| Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке | 712 |
| Улучшение времени работы | 714 |
| Упражнения | 716 |
| 25.2 Алгоритм Флойда-Варшалла | 718 |
| Структура кратчайшего пути | 718 |
| Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин | 719 |

| | |
|--|------------|
| Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке | 720 |
| Построение кратчайшего пути | 720 |
| Транзитивное замыкание ориентированного графа | 722 |
| Упражнения | 724 |
| 25.3 Алгоритм Джонсона для разреженных графов | 726 |
| Сохранение кратчайших путей | 726 |
| Генерация неотрицательных весов путем их изменения | 728 |
| Вычисление кратчайших путей между всеми парами вершин | 728 |
| Упражнения | 730 |
| Задачи | 731 |
| Заключительные замечания | 732 |
| Глава 26. Задача о максимальном потоке | 734 |
| 26.1 Транспортные сети | 735 |
| Транспортные сети и потоки | 735 |
| Пример потока | 737 |
| Сети с несколькими источниками и стоками | 739 |
| Как работать с потоками | 740 |
| Упражнения | 741 |
| 26.2 Метод Форда-Фалкерсона | 742 |
| Остаточные сети | 743 |
| Увеличивающие пути | 745 |
| Разрезы транспортных сетей | 746 |
| Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона | 749 |
| Анализ метода Форда-Фалкерсона | 750 |
| Алгоритм Эдмондса-Карпа | 752 |
| Упражнения | 755 |
| 26.3 Максимальное паросочетание | 756 |
| Задача поиска максимального паросочетания в двудольном графе | 757 |
| Поиск максимального паросочетания в двудольном графе | 758 |
| Упражнения | 761 |
| * 26.4 Алгоритмы проталкивания предпотока | 761 |
| Интуитивные соображения | 762 |
| Основные операции | 764 |
| Операция проталкивания | 764 |
| Операция подъема | 766 |
| Универсальный алгоритм | 766 |
| Корректность метода проталкивания предпотока | 768 |