Ю. П. Петров

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0$$

История и философия науки

Математика, вычислительная техника, информатика

- **Для аспирантов и соискателей при подготовке к экзамену кандидатского минимума**
- **Для студентов вузов**
- **Для всех интересующихся историческими и философскими вопросами науки**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

Учебное пособие

bhv

Ю. П. Петров

ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ НАУКИ

МАТЕМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, ИНФОРМАТИКА

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
П30

Петров Ю. П.

П30 История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 448 с.: ил.

ISBN 5-94157-689-7

Учебное пособие содержит материал, необходимый и достаточный для подготовки и сдачи нового экзамена кандидатского минимума по истории и философии математики, вычислительной техники и информатики в соответствии с изменением перечня кандидатских экзаменов. Приведены сведения о зарождении и развитии математики как науки, формировании понятия алгоритмизации, появлении и эволюции вычислительной техники, рассмотрена история и философия информатики. Особо выделена история развития методов оптимизации, теории автоматического управления, теории некорректных задач. Даны рекомендации к ответам на кандидатском экзамене.

В основу книги положены лекции, прочитанные автором в Санкт-Петербургском государственном университете и изданные в 2001 году.

Для аспирантов и соискателей степени кандидата физико-математических или технических наук, студентов, специалистов и всех тех, кто интересуется историей науки

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Натальи Смирновой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 25.04.05.
Формат 70×100$^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 36,12.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-689-7

Оглавление

Предисловие

Это учебное пособие написано для аспирантов и соискателей, претендующих на степень кандидата физико-математических или технических наук по многочисленным специальностям, имеющим отношение к математике, прикладной математике, вычислительной технике, информатике и теории управления, т. е. для всех тех, кому, согласно приказу Минобразования с 01.07.2005 вместо экзамена по философии надо сдавать экзамен по истории и философии науки.

Книга также адресована студентам — особенно студентам тех вузов, где читаются лекции по истории математики, вычислительной техники, информатики, — и всем, кто интересуется математикой, вычислительной техникой и информатикой и хочет лучше знать историю этих областей науки.

Основное внимание в первой части книги (главы 1—11) уделено вопросам, входящим в программы нового кандидатского экзамена по истории и философии науки. Отдельные разделы посвящены философии математики и философским проблемам информатики.

Во второй части (главы 12, 13, 14) дано более углубленное изложение избранных разделов истории науки, причем рассказано не только о новой, но и о новейшей истории науки — изложение доведено до конца XX века.

В основу книги положены лекции, прочитанные автором на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) и изданные в 2001 году. Рецензентом издания был член-корреспондент Российской академии наук В. И. Зубов.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00317.

Вопросы и пожелания читателей принимаются на e-mail **petrov1930@mail.ru**, а также в адрес издательства "БХВ-Петербург".

ЧАСТЬ I

Часть I

Выбирая объем и стиль изложения первой части, автор стремился к тому, чтобы предлагаемый материал был прост, доступен для студентов и всех тех, кто интересуется историей науки, но в то же время был достаточен для ответа на вопросы программ нового, введенного с 01.07.2005, кандидатского экзамена по истории и философии науки — достаточен для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата физико-математических или технических наук по специальностям, связанным с математикой, прикладной математикой, вычислительной техникой и информатикой.

История методов оптимизации, теория управления, а также история проблемы обеспечения надежности вычислений — изложены во второй части.

Глава 1

Математика Древнего мира

1.1. Древний Египет и Древний Вавилон

Математика возникла одновременно с образованием первых земледельческих государств. До тех пор, пока люди жили племенами и малыми общинами, им хватало простейших навыков счета в переделах первых десятков. С появлением государств, объединивших десятки и сотни тысяч людей, общественная жизнь усложнилась. Появилась необходимость учитывать налоги и повинности, вносимые тысячами земледельцев и, следовательно, оперировать с многозначными числами. Стало нужно распределять земельные участки и, значит, вычислять их площадь; с появлением складов и амбаров для зерна возникла необходимость рассчитывать их вместимость, — т. е. вычислять объем. Таким образом, появилась потребность в определенном уровне математических знаний.

Математические знания, безусловно, существовали во многих древних землевладельческих государствах, однако восстановить уровень знаний, который в них существовал, можно лишь по сохранившимся документам, найденным при археологических раскопках. Далеко не всегда документы сохранялись, и поэтому сколько-нибудь подробные данные мы имеем лишь о математике Древнего Египта и Древнего Вавилона. Египтяне писали на хрупком папирусе, но в сухой почве Египта некоторые папирусы пережили тысячелетия и дошли до нас. Вавилоняне писали клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась. Найдены сотни тысяч обожженных глиняных табличек с клинописными текстами, некоторые из них посвящены математическим расчетам.

В папирусных текстах с египетскими иероглифами и глиняных табличках с вавилонской клинописью оживает перед нами седая древность. Сохранились тексты, дошедшие до нас со времен первых фараонов Египта (Древнее царство), а это 2700—2000 лет до нашей эры. Не меньшую древность имеют и клинописные таблички, некоторые из них относятся к эпохе первых вавилонских царей, правивших 2300—1900 лет до нашей эры.

Математика в Древнем Вавилоне достигла несколько большего развития, чем в Египте, поэтому рассмотрим более подробно вавилонскую математику, или, правильнее, — математику древнего Двуречья, ибо одна из самых древних земледельческих культур мира возникла по берегам двух текущих рядом великих рек — Тигра и Евфрата. Сейчас эту территорию занимает государство Ирак. Как в наши дни, так и в древности Двуречье — это засушливая равнина, дождей мало, но почвы плодородны и при искусственном орошении дают богатые урожаи. Сохранились клинописные таблички, позволяющие подсчитать, что в государствах древнего Двуречья урожай (в современных мерах) достигал 30 центнеров с гектара. Это большой урожай. Именно он обеспечивал тот избыток, прибавочный продукт, на котором выросли культура и наука городов и государств, расположенных в долинах Тигра и Евфрата.

Великие реки Тигр и Евфрат — капризны, они то разливаются, то мелеют, несут с собой плодородный ил, но и грозят разрушительными наводнениями. Для того чтобы жить на этой негостеприимной земле, необходим согласованный труд тысяч людей. Только совместным трудом людей, подчиненных единой воле, оказалось возможным построить сеть каналов, проводящих животворную влагу на поля, создать систему дамб, ограждающих от наводнений, и поддерживать все это сложное хозяйство в порядке.

Сама природа подталкивала людей к объединению, и города-государства возникли здесь очень рано — еще за несколько тысячелетий до нашей эры в Двуречье появились города шумерского народа — Ур, Урук, Лагаш, а в XXIII веке до н. э. уже существовало единое государство, объединившее все города Двуречья, — государство со столицей в Вавилоне. Это было деспотическое государство, с неограниченной властью царя и регулярными общественными работами по строительству и поддержанию в порядке каналов, плотин и дамб. Такими работами руководило сословие писцов — сословие почетное и уважаемое. Писцами нередко становились даже сыновья правителей. "Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих" — читаем мы на одной из древних клинописных табличек.

Из опыта писцов и возникла вавилонская математика, а опыт этот был велик, ибо царство вавилонское существовало долго. Если считать от царя Саргона Древнего, в XXIII веке до н. э. впервые объединившего Двуречье, и до персидского завоевания, покончившего в 538 году до н. э. с самостоятельностью Вавилона, то мы насчитаем 17 веков независимого существования. Безусловно, математика не была одной и той же все это долгое время, она развивалась, но развитие было медленным, да и ограниченность числа дошедших до нас математических текстов не позволяет достаточно хорошо представить себе развитие вавилонской математики. Мы опишем только то, что вавилоняне умели, — а умели они многое.

Вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления (именно от вавилонян идет традиция делить градус на 60 минут и минуту на 60 секунд). Они умели складывать и вычитать многозначные числа и дроби. Для облегчения умножения и деления они составили обширные таблицы. Имелись у них также таблицы степеней некоторых чисел до десятой степени включительно, пригодные одновременно и для отыскания корней. Вавилоняне умели решать линейные и квадратные уравнения, правильно вычислять площади прямоугольников, треугольников, трапеций, объемы куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды.

Однако мы не найдем у них самого привычного нам элемента математики — доказательства. Правила вычисления заучивались как догма и передавались от одного поколения писцов к другому. Порукой верности служила вековая практика. При этом точные и приближенные формулы не разделялись, если только приближенная формула удовлетворяла практическим требованиям.

Характерным примером служит использовавшееся еще в Древнем Египте правило для вычисления площади произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d. Египтяне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм пар противоположных сторон, т. е.:

$$S = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}. \tag{1}$$

Эта формула — приближенная, и можно привести примеры четырехугольников, для которых ее погрешность сколь угодно велика. Так, например, площадь ромба со стороной a и острым углом β равна, как известно, $S_T = a^2 \sin\beta$, в то время как по формуле (1) имеем $S_{\text{пр}} = a^2$. Чем меньше угол β, тем больше погрешность. Однако на практике формула (1) применялась в Египте для расчета площади земельных участков, форма которых обычно бывала близка к прямоугольнику, а в этом случае формула (1) давала достаточную точность. Сознавали ли древние землемеры, что формула (1) является приближенной, мы не знаем.

И точные, и приближенные формулы и правила заучивались учениками без доказательств, заучивались как рецепт, как догма.

Сходными чертами с математикой Древнего Египта и Древнего Вавилона обладала и математика государств, существовавших 1,5—3 тысячи лет назад на территориях Индии и Китая. Везде мы обнаруживаем большой арсенал практических знаний, умение проводить громоздкие вычисления с большими числами, но не находим основного звена математики как науки — не находим доказательства. Математика как наука возникла не в Египте, не в Двуречье, не в Индии и Китае — она возникла в Древней Греции, и это произошло не случайно.

1.2. Древняя Греция

Математика в Древней Греции начала развиваться позже и на другой социально-экономической основе, чем математика Древнего Египта и Древнего Вавилона. Греция не имела таких плодородных орошаемых земель, как в долинах Нила, Тигра и Евфрата, однако с течением времени, при неуклонном совершенствовании орудий труда сравнительно мало плодородные почвы Греции стали приносить прибавочный продукт, служивший материальной базой для развития культуры и науки. Помимо земледелия, греки издавна занимались и рыболовством. Изрезанность береговой линии, обилие заливов и бухт способствовали тому, что греки рано стали морским народом. Торговые и завоевательные плавания греческих мореходов (они получили поэтическое отражение в эпических песнях "Илиады" и "Одиссеи", в мифах об аргонавтах) способствовали расширению кругозора греческого народа, воспитывали любознательность и пытливость.

К VI веку до н. э. греки, помимо собственно Греции, населяли многочисленные города по побережью Малой Азии и Италии. Все эти города были самостоятельны. Греция не знала централизации. Она делилась на самостоятельные города-государства ("полисы"), наиболее знаменитыми из которых были Афины, Спарта, Милет, Сиракузы. В большинстве этих городов установилась демократическая форма правления, когда городские ремесленники, купцы, матросы, окрестные земледельцы на народном собрании непосредственно решали все государственные дела, избирали должностных лиц и предводителей войска, образовывали многочисленные коллегии присяжных, которые вершили суд. Так в Афинах, например, суд присяжных — гелиэя — состоял из 500 человек и регулярно переизбирался, так что практически почти каждый гражданин участвовал в суде, привыкал к логике и доказательствам судебных ораторов.

Демократия способствовала развитию личности, невиданному раньше расцвету производительных сил, культуры и науки. Греческая наука — и в том числе греческая математика — это творение свободных людей, полноправных участников общественных и государственных дел, людей, привыкших думать и рассуждать, выслушивать доводы и оспаривать их. Необходимо, разумеется, помнить об ограниченности греческой демократии, где рядом со свободными полноправными гражданами существовали массы рабов. Рабский труд оказывал глубочайшее влияние на Древнюю Грецию. С одной стороны, создавая прибавочный продукт, он обеспечивал полноправным гражданам свободное время для занятия государственными делами, искусством и наукой, с другой стороны — массовое рабовладение, обесценивая труд свободных людей, подрывало самые основы греческой демократии, которая, поэтому, оказалась недолговечной. В VI веке до н. э. устанавливается демократическое правление в большинстве греческих городов-полисов, в V веке эти города победоносно отражают персидское нашествие, а уже в IV веке до н. э. внутренние раздоры среди демократии приводят к ее кризису, свободные города-полисы постепенно попадают под власть македонской монархии, а затем — римской империи.

Эпоха расцвета греческой демократии оказалась недолговременной (менее 300 лет), но в науке она оставила неизгладимый след.

"Отцом греческой науки" обычно считают Фалеса Милетского — купца, политического деятеля, философа, астронома и математика, жившего примерно в 625—547 годах до н. э. в городе Милете. Наиболее известен Фалес как философ, но он же был и первым греческим геометром, который доказал, например, что:

- диаметр делит круг пополам;
- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- вертикальные углы равны;
- если у двух треугольников сторона и два угла, прилежащих к ней, равны, то и треугольники равны.

Последнее утверждение Фалес использовал, в частности, для определения высоты египетских пирамид по длине отбрасываемой ими тени, для оценки расстояния кораблей на море.

Но главная суть того нового, что внес Фалес, было само понятие о доказательстве того или иного утверждения, т. е. о выводе его из других, более очевидных и заведомо верных утверждений. Мы не знаем в деталях, как проводил свои доказательства Фалес, ибо работы его до нас не дошли, дошел лишь их пересказ в работах позднейших греческих ученых. Можно догадываться, что, например, теорему о равенстве вертикальных углов Фалес выводил из очевидного для него принципа (аксиомы), что если от двух равных величин отнять третью, то остатки будут равны.

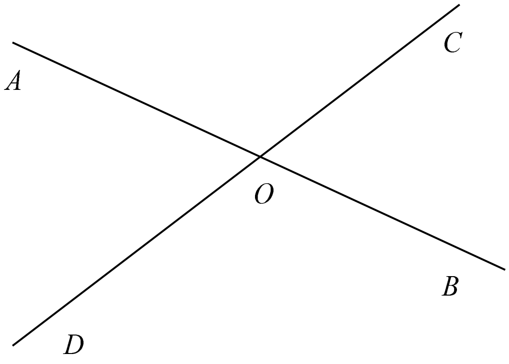

Рис. 1.1. К теореме Фалеса о равенстве вертикальных углов

Действительно, вертикальные углы AOD и COB (рис. 1.1) можно рассматривать как остатки после вычитания из углов AOB и COD (равных каждый двум прямым) одного и того же угла AOC. Отсюда и следует, доказывал своим согражданам Фалес, что вертикальные углы равны.

Мы так привыкли к тому, что в основе математики лежит доказательство, что с трудом представляем себе, как может быть иначе. А ведь на самом деле доказательства появились только в Древней Греции. Математики Древнего Египта и Древнего Вавилона, как мы уже отмечали, не знали доказательств. Более того, математики Китая — не только древнего, но и средневекового, математики Японии — вплоть даже до самого XVIII века — тоже не знали, что такое доказательство. А ведь китайские и японские математики достигли в Средние века высокого уровня развития. Китайцы умели, например, решать системы линейных уравнений со многими неизвестными (аналогичный методу Гаусса метод "фан-чен" — последовательного исключения неизвестных — был известен китайцам еще во II веке до н. э.). Китайцы решали не только квадратные уравнения, но и уравнения высших степеней — так, например, уравнение:

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0$$

не испугало китайского математика XIV века Чжу Шицзе, который нашел его корень $x = 8\frac{2}{3}$. И в то же время доказательств китайцы (как и японцы до XVIII века) не знали. В достоверности результатов они убеждались проверкой, например — подстановкой корня в уравнение, но не доказывали своих утверждений в современном смысле этого слова. Пример Египта и Вавилона, Китая и Японии показывает, что математика веками и тысячелетиями может развиваться совершенно особым, непривычным для нас, путем.

Греция является исключением. В Греции — и только в Греции — достигло развития математическое доказательство, а все другие страны — арабские государства Средних веков, средневековая Европа — следовали уже проложенным путем.

Можно долго фантазировать на тему: а что было бы, если, например, в V веке до н. э. воевавшие с Грецией персы достигли успеха и погубили бы греческую науку? Когда, при каких условиях математическое доказательство возникло бы вновь? Или оно так и не возникло бы? Об этом можно долго спорить, факты же говорят об одном — математическое доказательство было создано трудами ученых Древней Греции, а математики всех других народов — Индии, стран ислама, средневековой Европы — использовали греческий опыт, опирались на уже выработанную греками традицию доказательства.

Почему традиции математического доказательства зародились именно в Древней Греции, а не в других странах? Об этом можно высказывать только догадки. Безусловно, существенную роль сыграла привычка свободного гражданина греческого города-государства к демократическому обсуждению общественных дел, привычка выслушивать обстоятельные доводы ораторов в народном собрании, обвинителей и защитников в суде, привычка обсуждать эти доводы, взвешивать их обоснованность. И переходя к рассмотрению научных вопросов, греческий гражданин сохранял эту привычку: ему хотелось не только уяснить истину, но и убедить окружающих в своей правоте, привести убедительные доводы, привести доказательства своих утверждений. Так, по всей вероятности, возникла в Древней Греции традиция математического доказательства.

Позже Аристотель учил, что доказательства не только устанавливают справедливость тех или иных фактов, но проясняют сущность этих фактов и раскрывают логические связи между ними.

Другая характерная черта греческой науки — интерес греков, помимо прикладных задач, еще и к чисто теоретическим вопросам. Греки развивали математику не только ради ее приложений, но и ради любознательности, ради постижения законов, управляющих миром, которые — как они впервые подметили — можно свести к числу и мере.

Числовые закономерности стали изучаться греческим философом Пифагором и его учениками. О самом Пифагоре, жившем с 564 по 473 годы до н. э., сохранилось мало достоверных сведений. В основном до нас дошли связанные с его именем легенды — вроде той, что, доказав теорему, известную сейчас под именем теоремы Пифагора, он велел принести в жертву 100 быков. Однако достоверно известно, что, занимаясь музыкой, Пифагор и его ученики подметили, что качественные отличия звуков обуславливаются чисто количественными различиями в длине струн. Если длины струн относятся как 1:2, 3:2 или 4:3, то разница в тонах будет октавой, квинтой или квартой, и музыкальные интервалы благозвучны, при других отношениях длин возникает диссонанс, и т. п. Так, наблюдения над музыкой натолкнули пифагорейцев на великую мысль, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел, или, как впоследствии пересказал их идеи Аристотель: "элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом".

Новый подход греков к математической науке — подход, основанный на рассуждении и доказательстве, позволил грекам в немногие десятилетия далеко перекрыть все достижения древних египтян и вавилонян, накапливавшиеся в течение многих веков. Греки быстро открыли множество фактов (теорем), относящихся к свойствам прямоугольников, параллелограммов и других геометрических фигур. Фактически вся та геометрия, которая сегодня изучается в средней школе, была открыта греками. Причем интересно, что греки основное внимание сосредоточили не столько на конкретных практических задачах, сколько на их обобщениях.

Рассмотрим одно их таких обобщений — знаменитую задачу об удвоении куба. Еще в древности была известна задача об удвоении квадрата — т. е. о построении такого квадрата, площадь которого была бы в два раза больше данного. Такая задача часто возникала при распределении земельных участков, и греки быстро нашли ее решение. Умели они и строить квадраты, площадь которых была в три, в четыре, в любое число раз больше данного. Все построения производились циркулем и линейкой и особых затруднений не вызывали. Однако у греков возникла мысль об обобщении задачи из плоскости в пространство, о построении куба, объем которого был бы ровно в два раза больше объема данного куба. Такая задача вряд ли возникла из практических потребностей, однако древние греки с большим жаром отдавались ее решению. Возникла даже красивая легенда о том, откуда взялась сама эта проблема — проблема удвоения куба. Легенда рассказывает, что на греческом острове Делос разразилась эпидемия, от которой умирало много людей. Жители обратились за помощью к жрецам Аполлона — покровителя острова. Оракул храма Аполлона якобы ответил, что эпидемия прекратится тогда, когда будет удвоен (и в точности удвоен) жертвенник Аполлона, имеющий форму куба. Эта легенда отражает стремление греков объяснить, почему они столько сил и внимания отдали такой, не имеющей большого практического значения, задаче, как удвоение куба.

А задача оказалась очень сложной и, несмотря на все приложенные усилия, ее никак не удалось решить с помощью линейки и циркуля. Нам теперь, конечно, понятна причина затруднений древних греков — ведь с помощью циркуля и линейки можно решать лишь задачи, сводящиеся к уравнению второй степени или цепочкам таких уравнений, а удвоение куба сводится к уравнению третьей степени. Действительно, если ребро данного куба равно a, а ребро искомого куба обозначить через x, то для определения x получаем уравнение третьей степени

$$x^3 = 2a^3,$$

не сводящееся к квадратному или цепочке квадратных уравнений. После долгих лет безуспешных попыток найти x с помощью циркуля и линейки греки стали пробовать другие методы и обнаружили, что задача об удвоении куба и многие другие, не разрешимые циркулем и линейкой, получают решение, если предварительно построить новые кривые — эллипс, гиперболу, параболу. Так задачи об удвоении куба дали первый толчок к изучению этих кривых — кривых второго порядка, которые впоследствии стали играть столь важную роль и в математике, и в астрономии. Истинная роль этих кривых была полностью оценена лишь в XVII веке, когда Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам. А началось все со скромной (но трудной) задачи об удвоении куба.

Не меньшую популярность имели в древности и еще две знаменитые задачи — трисекции угла (т. е. деления циркулем и линейкой произвольного угла на три равные части) и квадратуры круга (т. е. построения квадрата, в точности равновеликого данному кругу). И здесь мы видим процесс обобщения. Совсем не трудно разделить циркулем и линейкой любой угол на две равные части. Но заманчиво обобщить задачу и найти метод деления угла на n частей. Уже при $n = 3$ обобщение оказалось неожиданно трудным. Традиционных инструментов геометрии — циркуля и линейки без делений явно не хватало. Греки нашли остроумное решение, использующее дополнительный инструмент — линейку с нанесенными метками — но не оставляли упорных попыток найти "классическое" построение — т. е. использующее только гладкую линейку и циркуль. Трудно представить, сколько труда и сил отняла эта задача; только в XIX веке было окончательно доказано, что циркулем и линейкой трисекция угла не осуществима[1*]. Та же судьба постигла и третью знаменитую задачу древности — квадратуру круга. Она была предметом пристального внимания и упорных усилий многих математиков Древней

* Примечания приведены в соответствующем разделе, расположенном в конце книги. — *Ред.*

Греции, и лишь в XIX веке было доказано, что циркулем и линейкой она также не разрешима.

К сожалению, о самой интересной ранней эпохе древней математики — эпохе, когда в спорах и дискуссиях вырабатывались ее методы, мы знаем мало. Нам известны имена выдающихся греческих математиков — Архит из Тарента (428—347 гг. до н. э.), Антифон (469—399 гг. до н. э.), Гиппократ Хиосский (около 400 г. до н. э.), Евдокс Книдский (около 408 — около 355 гг. до н. э.), Феодор из Кирены, Теэтет — дошли до нас и рассказы о задачах, которые они решали. Однако подлинные работы греческих математиков той поры до нас не дошли. Мы знаем о них лишь в пересказах позднейших математиков, работы которых история сохранила. Известно лишь, что и тогда кипели острые научные споры. Так, при вычислении площадей и объемов греки столкнулись с проблемой предельного перехода. Известно, что уже в V веке до н. э. греки знали не только формулу для расчета объема пирамиды (одна треть произведения площади основания на высоту), но и соответствующую формулу для конуса. Почти очевидно, что конус они рассматривали как предельный случай пирамиды с бесконечно большим числом боковых граней, и на этом пути получили правильную формулу для объема конуса.

Однако хорошо известно, что предельный переход — дело тонкое, и при переходе от конечного к бесконечному возникают многие логические трудности и противоречия. На эти противоречия еще в V веке до н. э. обратил серьезное внимание философ Зенон из Элеи, который придал им броскую и запоминающуюся форму "апорий" (парадоксов).

Вот одна из апорий: летящая стрела никогда не достигнет конца своего пути, потому что она должна сперва долететь до середины пути, затем до середины остатка и т. д. Прежде чем попасть в цель, стрела должна отсчитать бесконечное множество "середин" остающегося ей пути, и значит, никогда не достигает цели.

Вот другая, особенно знаменитая, апория — "Ахиллес и черепаха". Пусть впереди быстрого Ахиллеса ползет черепаха, начальное расстояние между ними — a, а скорость Ахиллеса в k раз больше скорости черепахи. Сколь бы велико ни было k, указывает Зенон, Ахиллес никогда не догонит черепаху, — когда он пробежит разделяющее их первоначальное расстояние a, черепаха проползет $\frac{a}{k}$, когда Ахиллес пробежит и его, черепаха отползет на $\frac{a}{k^2}$ — и т. д. Всякий раз между ними будет оставаться отличное от нуля расстояние $\frac{a}{k^n}$.

Не следует смотреть на апории упрощенно, как на остроумные софизмы. Греки прекрасно знали, что стрелы попадают в цель и Ахиллес догоняет черепаху. Однако им нужно было математически, — т. е. непротиворечиво — объяснить, как это происходит, а объяснение процесса реального движения является очень непростым делом.

Из курса философии мы знаем (еще Гегелем доказано), что все достаточно сложные понятия — и уж во всяком случае такие понятия, как "движение", "бесконечность" — являются понятиями внутренне противоречивыми. Можно ли построить математическую теорию движения, свободную от противоречий самого понятия "движение"? Совершенно бесспорного ответа на этот вопрос мы не имеем и в наше время.

Древние греки были первыми из тех, кто серьезно задумывался над трудностями математического описания понятий движения и бесконечности. Вот одна из трудностей — запишем путь Ахиллеса до встречи:

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

и путь черепахи:

$$S_Ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots .$$

Каждому отрезку $\dfrac{a}{k^n}$ пути Ахиллеса соответствует отрезок $\dfrac{a}{k^{n+1}}$ пути черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти столько же отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, можно рассуждать и иначе. Каждому отрезку пути черепахи $\dfrac{a}{k^n}$ можно сопоставить равный по величине отрезок пути Ахиллеса. Тогда получается, что к моменту встречи Ахиллес должен пробежать на один отрезок (начальный отрезок a) больше, чем черепаха. Если обозначить количество отрезков, пройденных черепахой до встречи, через α, то тогда получается, что $\alpha = \alpha + 1$ (не следует забывать, что α не является конечным числом). Таким образом, в мире бесконечного теряет свою силу одна из важнейших аксиом: "целое больше своей части".

С этой трудностью, стоящей на пути проникновения в бесконечное, встретились впоследствии и математики нового времени. Они пошли, как мы увидим, по другому пути, отличному от пути математиков Древней Греции. Греческие математики стремились, прежде всего, к безукоризненной логической строгости и поэтому они вообще отказались от понятия завершенной, "актуальной" бесконечности. Так, например, после долгих дискуссий и обсуждений греки отказались рассматривать окружность как правильный многоугольник с бесконечным числом сторон, а круг — как актуальную бесконечную совокупность равнобедренных треугольников с вершинами в центре круга и основаниями на сторонах вписанного в окружность многоугольника с бесконечным числом сторон. Такое рассмотрение было очень удобно, поскольку позволяло легко и просто найти, например, площадь круга как сумму площадей составляющих его треугольников — т. е. как произведение длины окружности на половину радиуса:

$$S = 2\pi r \frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Однако греки считали, что операции с актуальными бесконечностями могут приводить к противоречиям и неверным результатам. Поэтому для вычисления площадей и объемов криволинейных фигур и тел они стали, начиная с IV века до н. э., использовать предложенный Евдоксом метод "исчерпывания". В этом случае не используется актуальная бесконечность, — вместо этого доказывается, что потенциально, с увеличением числа шагов исчерпывания, разность между объемом искомого тела и некоторым заранее известным объемом может быть сделана сколько угодно малой.

Метод Евдокса строг, но очень громоздок, а главное — он позволял доказать уже известный результат, но не позволял находить площади и объемы новых фигур и тел.

Отказ от понятия актуальной бесконечности был первой большой жертвой, принесенной математиками Древней Греции ради требований строгости.

Вторая жертва была связана с открытием несоизмеримости. Несоизмеримость открыли пифагорейцы еще в V веке до н. э., обнаружив, что сторона квадрата несоизмерима с его диагональю. По отдельным замечаниям, сохранившимся у более поздних авторов, мы можем приблизительно восстановить ход рассуждений пифагорейцев: предположим, что в квадрате $ABCD$ сторона AB и диагональ AC соизмеримы, т. е. их отношение равно отношению двух целых чисел:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}, \tag{2}$$

причем m и n не являются оба четными, иначе дробь $\frac{m}{n}$ можно было бы сократить на два. Из (2) следует, что $(AC)^2 : (AB)^2 = m^2 : n^2$, но по теореме Пифагора $(AC)^2 = 2(AB)^2$ и, следовательно:

$$m^2 = 2n^2. \tag{3}$$

Из равенства (3) вытекает, что m — четное число, $m = 2t$, а, следовательно, n — нечетное. Но, подставив соотношение $m = 2t$ в равенство (3), получим:

$$4t^2 = 2n^2,$$

или $n^2 = 2t^2$, откуда следует, что n должно быть четным. Таким образом, предположение о соизмеримости стороны квадрата и его диагонали приводит к противоречию. Отсюда, по мнению древних греков, следовало, что бесполезно искать число x, являющееся решением даже простейшего квадратного уравнения $x^2 = 2$. По мнению греков, такого числа (дроби) нет, ибо оно не может быть ни четным, ни нечетным. Довольствоваться приближенными значениями корней квадратных уравнений (как это делали вавилоняне, умевшие последовательными итерациями находить корни с любой желаемой степенью точности) греки не хотели, поскольку они стремились к безукоризненно строгому результату.

В конечном счете, греки вообще отказались от поисков арифметического или алгебраического решения квадратных уравнений и стали применять очень громоздкий чисто геометрический метод, когда коэффициенты уравнения задаются в виде отрезков, а неизвестное x определяется построением с помощью циркуля и линейки. При таком способе трудность несоизмеримости отпадает, получается точное, а не приближенное значение корня (если предположить, конечно, что мы располагаем идеальными инструментами), но если говорить о реальной точности, достигаемой при геометрических построениях реальными циркулем и линейкой, то она, конечно, гораздо ниже той, которая достигается при арифметическом вычислении корня после нескольких последовательных итераций. Однако древних греков волновала не действительная точность, а принципиальная, поэтому они в математике с бо́льшим рвением отдавались геометрии и очень мало внимания уделяли реальным вычислениям.

Вообще, характерной чертой развития греческой математики является быстро нарастающий отрыв теории от практики, "чистой" математики от прикладной, хотя самих этих терминов — чистая и прикладная математика — тогда еще не употребляли. На заре греческой математики великий Фалес, доказав первые теоремы, сразу же применял их для определения высоты египетских пирамид по измерениям длины отбрасываемой ими тени, для измерения расстояния до корабля в море и для многих других практических приложений. Однако в ходе дальнейшего развития греческой математики приложение ее к решению практических задач стало считаться все более и более второстепенным делом.

Эта особенность греческой науки неразрывно связана с самим фундаментом древнегреческого общества — рабовладением. Действительно, если труд — удел раба, то всю прикладную часть науки, все то, что расширяет возможности и могущество труда, греки постепенно начинали считать не стоящим внимания свободного человека.

Отрыв греческой математики от практической жизни был закреплен и усилен философской школой Платона, занявшей господствующее положение к IV веку до н. э., в эпоху упадка греческой демократии. Платон, живший в 427—347 гг. до н. э., был философом-идеалистом и считал, что окружающий нас материальный мир, воспринимаемый нашими чувствами, есть лишь бледное, неверное отражение другого мира — мира бессмертных идей, не воспринимаемых чувствами, но постигаемых разумом.

Платон приводит интересное сравнение (даем его в пересказе): Представим себе людей, живущих в глубине темной пещеры, не видящих ничего, кроме ее стен, на которые падают тени реальных предметов нашего мира. Люди, не видящие ничего, кроме этих теней, могут начать считать именно тени единственной реальностью, и лишь усилие мысли позволит им понять, что истинный и прекрасный мир лежит далеко за пределами их темной пещеры. Природа не дала людям органов чувств для постижения мира бессмертных идей. Наши глаза, уши позволяют нам ощущать лишь тени мира идей — реальные, бренные предметы окружающего мира, а истинный мир бессмертных идей, как считал Платон, постижим лишь разумом, силой отвлеченной мысли.

Сейчас мы настолько привыкли к материалистическому мировоззрению, что нам уже не так легко постигнуть точку зрения Платона. Возьмем, например, понятие сферического тела. Для нас сфера — это математическая абстракция от реальных тел, форма которых близка к сферической. Для Платона настоящей, истинной, реальностью была идеальная сфера — геометрическое место точек, равностоящих от центра, а все реальные земные тела, близкие к сфере, — это лишь искаженные отражения этой идеальной сферы.

Из философских воззрений Платона вытекает и та большая роль, которую он отводил математике. Действительно, для последователей Платона было очевидным, что только математика могла помочь постичь законы, управляющие единственным истинным для них миром — миром идей, миром идеальных треугольников, окружностей, конусов, сфер. И единственным путеводителем в этом идеальном мире могло быть лишь строгое математическое рассуждение, очищенное от всякой наглядности, от всякой апелляции к нашим ощущениям, восприятиям, к нашей интуиции. Только строгое доказательство, а не свидетельство наших чувств — может, по Платону, установить истину.

Из философских идей Платона и его последователей берет свое начало такая характерная черта греческой математики, как обостренное внимание к строгости доказательств. Под несомненным влиянием этих идей написан знаменитый трактат Евклида "Начала".

Говоря о математике Древней Греции, мы, как уже отмечалось, не должны забывать, что почти все работы греческих математиков V—IV веков до н. э. не дошли до нас. Сохранились лишь отдельные, часто отрывочные, фрагменты из работ таких математиков, как Архит из Тарента, Феодор из Кирены, Теэтет, Гиппий из Элиды, Гиппократ Хиосский, Евдокс Книдский. Поэтому можно лишь с большим трудом и весьма неполно восстановить путь развития греческой математики, который, конечно, не был ровным и прямолинейным, протекал в ожесточенных спорах и дискуссиях — особенно о проблемах конечного и бесконечного, соизмеримости и несоизмеримости. Восстановить детали этих споров уже невозможно. О греческой математике мы судим, в основном, по итоговому, завершающему труду — по трактату Евклида "Начала". Этот трактат, состоящий из 13 книг, дошел до нас полностью в многочисленных списках. Евклид, живший в конце IV — начале III века до н. э., подвел итоги предшествующему, примерно трехсотлетнему, развитию греческой математики. Надо отметить, что современники не слишком ценили Евклида, считали его лишь популяризатором идей своих великих предшественников. Но история оправдала Евклида. Именно его трактат выдержал испытание временем, многократно переписывался, а поэтому и дошел до нас через века в полном виде, в отличие от работ его предшественников, из которых до нас дошли отрывки и неполные пересказы.

Заметим, что, в отличие от самого трактата, биография Евклида до нас не дошла. О жизни Евклида, как и о жизни других греческих математиков, мы почти ничего не знаем. Неизвестны даже точные годы его рождения и смерти.

Изложение у Евклида ведется строго дедуктивно. Начинается его трактат с определений, постулатов и аксиом. Определения Евклида ("точка есть то, что не имеет частей", "линия есть длина без ширины") сразу подчеркивают, что дальнейшее изложение будет относиться не к реальному, а к идеальному миру, миру Платона, не постигаемому чувствами, но постигаемому разумом. Свойства этого мира надо логически выводить из аксиом и постулатов. Вот формулировки аксиом Евклида:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. И целое больше части.

А вот постулаты Евклида:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. И, наконец, знаменитый "пятый постулат" (о нем мы еще много будем говорить, когда дойдем до возникновения неэвклидовой геометрии):

   если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Опираясь на эти аксиомы и постулаты, Евклид методически доказывает десятки теорем.

- В первой из 13 книг "Начал" излагается планиметрия прямолинейных фигур, устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников и трапеций. Завершает первую книгу теорема Пифагора.
- Во второй книге излагаются элементы геометрической алгебры (геометрическое решение квадратных уравнений).
- В третьей книге рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд.
- В четвертой книге даются методы построения (циркулем и линейкой) правильных многоугольников при $n = 3, 4, 5, 10$ и 15.
- В пятой книге излагается теория отношений Евдокса и основанный на ней "метод исчерпывания", с помощью которого затем доказываются теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел.
- В шестой книге излагается учение о подобии и геометрический метод решения квадратных уравнений вида:

$$\frac{b}{c}x(a \pm x) = S.$$

- Книги 7, 8 и 9 посвящены арифметике. В них изложены теория делимости, алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), приводится разложение любого натурального числа на простые множители, доказывается, что такое разложение единственно, и, наконец, доказывается знаменитая теорема Евклида о том, что простых чисел бесконечно много.

Доказательство этой теоремы гениально просто — допустим, что существует только конечное число простых чисел: $p_1; p_2 ... p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 ... p_n + 1$. Оно будет либо простым, и тогда мы имеем новое простое число, не совпадающее с нашими $p_1; p_2 ... p_n$, либо оно будет составным, и тогда оно делится на простое число q, снова не совпадающее ни с одним из $p_1; p_2 ... p_n$.

Однако простота и наглядность доказательства этой теоремы Евклида о простых числах является исключением. Вообще же доказательства Евклида длинны, сложны и трудны для читателя.

- В десятой книге Евклида говорится об отрезках, являющихся корнями квадратных и биквадратных уравнений, и дается их классификация.
- Одиннадцатая книга посвящена стереометрии. Она содержит теоремы о прямых и плоскостях в пространстве и о равновеликости параллелепипедов и призм.
- В двенадцатой книге методом исчерпывания Евдокса доказано, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров, объемы шаров — как кубы их диаметров, и что объем пирамиды и конуса в три раза меньше объемов призмы и цилиндра с теми же основаниями и высотами.
- Наконец, тринадцатая завершающая, книга "Начал" посвящена построению пяти правильных многогранников — тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра — и доказательству того, что других правильных многогранников не существует.

Отношение к великому труду Евклида не у всех одинаково. Для очень многих математиков более позднего времени он был образцом. В школах Англии еще в XVIII и XIX веках учили школьников геометрии по дословным переводам "Начал" на английский язык. А вот Алексей Николаевич Крылов как раз по этому поводу писал: "Можно лишь удивляться, как общество «защиты детей от жестокого обращения и покровительства животным» допускало, чтобы 12—13-летних мальчиков мучили в школах переводами Евклида". (А. Н. Крылов "Значение математики для кораблестроения", 1938).

Надо сказать, что, действительно, "Начала" Евклида написаны очень тяжело, хотя с удивительной логичностью. Евклид нигде не поясняет, для какой цели вводится та или иная теорема, нигде не определяет общего плана изложения.

В ходе длинных и сложных доказательств многочисленных теорем он ни разу не указывает, не поясняет, почему выбран тот или другой путь доказательства, какие наводящие соображения могли бы натолкнуть читателя на понимание основной идеи доказательства. Поэтому читать и понимать Евклида — занятие трудное и сложное. Иной раз кажется, что Евклид и не стремится совсем к тому, чтобы его понимали, ему важно только, чтобы с ним соглашались. Если ты согласился с постулатами и аксиомами, то ты неизбежно должен согласиться и со всей последовательностью теорем, этого требует железная логика изложения. Евклид ведет читателя по лабиринту теорем, как ведут слепого; на каждом шагу читатель обязан согласиться с евклидовой логикой, должен признать, что теорема доказана, и доказана правильно, но общий план лабиринта и цель путешествия по нему остаются не раскрытыми.

Для того чтобы понять, почему Евклид писал так, а не иначе, полезно разобраться предварительно, а зачем вообще писал Евклид свои "Начала", и с какой целью изучали их его современники.

Мы уже упоминали, что практические приложения науки в эпоху Евклида, в эпоху развитого рабовладения, подорвавшего уважение к труду, не считались ни важным, ни нужным делом. Поэтому прикладной стороне математики, возможности практического применения доказанных лемм и теорем Евклид специально и демонстративно не уделяет никакого внимания. Его цель — в другом. Евклид ставил своей задачей развить в читателях логику и (частично) эстетические чувства. Трактат Евклида предназначен для тренировки ума в логических построениях и для воспитания чувства прекрасного (от созерцания идеальных геометрических форм). А раз так, то, действительно, зачем же Евклиду было стремиться к простоте и доступности изложения? Чем труднее изложение, — тем лучше протекает тренировка разума в логике, лишь бы само изложение было безупречно логично и эстетически совершенно. И недаром завершает трактат Евклида книга о правильных многогранниках — тетраэдре, октаэдре, кубе, икосаэдре и додекаэдре — самых эстетически прекрасных объектах геометрии.

В английских частных школах XVIII—XIX веков, воспитывавших джентльменов, учили школьников по дословным переводам Евклида не для того, чтобы они потом хорошо вычисляли площади и объемы — этим джентльмены не занимались, — а для того, чтобы школьники на примере геометрии учились логике рассуждения, для того, чтобы они потом могли красноречиво и логично выступать в суде, в администрации, в парламенте — ради этого и учили будущие английские джентльмены трудные "Начала" Евклида.

Что же касается Алексея Николаевича Крылова, то он рассматривает математику совсем с другой стороны, он видит в математике орудие решения прикладных задач, которые ставит жизнь, и считает, что именно этому надо обучать школьников. А как раз решению практических задач Евклид не учит (мы уже рассмотрели, почему не учит), и поэтому А. Н. Крылов отрицательно относился к тому, чтобы в школах математика изучалась "по Евклиду". Современная школа, в общем, пошла за А. Н. Крыловым: наши школьные программы все больше отходят от традиций Евклида, и это не случайно.

Дело в том, что на пути к строгости изложения греки принесли слишком много тяжелых жертв. Стремясь избавиться от парадоксов актуальной бесконечности, они не только закрыли себе путь к построению дифференциального и интегрального исчисления, но и должны были при доказательстве любой теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел прибегать к длинному, сложному и скучному "методу исчерпывания". Стремясь избавиться от парадокса несоизмеримости, греки должны были излагать понятия алгебры на чисто геометрическом языке. Даже для уравнений второй степени это отягощало и делало крайне громоздким изложение решения, а уравнения третьей и высшей степеней практически так и остались недоступными.

Жертвы, принесенные греками на алтарь строгости, были тяжелы, но к эпохе жизни Евклида сложились прочные убеждения в их необходимости. Мы уже упоминали, что о жизни Евклида не сохранилось достоверных биографических сведений. Сохранилось лишь несколько анекдотов, которые, по всей вероятности, отражают не реальные факты жизни Евклида, а общие представления людей того времени о математике и математиках.

В одном анекдоте рассказывается, что царь Птолемей, современник и покровитель Евклида, спросил: неужели и ему, царю, для изучения геометрии нужно проходить столь долгим и трудным путем изучения лемм и теорем, непонятно как связанных друг с другом? На что Евклид, по преданию, гордо ответил, что в математике и для царей не существует легкого пути. Возможно, что в анекдоте этом отразилось недоумение не одного царя Птолемея, но и многих греков — зачем, почему математики излагают свою науку столь сложно и трудно, а также и твердая уверенность современных Евклиду математиков в том, что другого стиля изложения в настоящей науке нет и быть не может.

В другом анекдоте говорится о том, как ученик спросил у Евклида, какая польза может быть от изучения геометрической теории? Евклид якобы отвечал: "Раб, дай ему скорее обол (мелкую монету). Подумать только! Этот несчастный думает, что из геометрии можно извлечь какую бы то ни было практическую пользу". Этот анекдот тоже хорошо отражает мнение современников Евклида о практической значимости его науки.

Трактат Евклида подвел итоги развитию математики в самостоятельных греческих городах-полисах, но сам Евклид принадлежал к новой эпохе, эпохе эллинизма, когда после походов Александра Македонского в 336—323 гг. до н. э. потеряли прежнюю самостоятельность города-полисы, но зато возникли новые эллинистические государства: Птолемеев на территории Египта, Селевкидов на территории Двуречья и ряд других. В новых эллинистических государствах уже не существовало демократии, деспотическая власть принадлежала царям, но наукам и искусству многие из царей покровительствовали. Особенно надо отметить царей из династии Птолемеев. Основателем династии был Птолемей I, полководец Александра Македонского; после смерти в 323 г до н. э. своего повелителя Александра он превратил Египет в самостоятельное царство, где династия Птолемеев царствовала почти 300 лет (последней царицей этой династии была Клеопатра, и после ее гибели в 31 г. до н. э. Египет был превращен Октавианом Августом в провинцию римской империи). Еще Птолемей I основал в новой столице Египта — Александрии — особое учреждение Мусейон (дом муз), в который были приглашены многие видные ученые того времени. Мусейон субсидировался государством, и ученые получали жалование. По сути дела, это был прообраз нынешних научно-исследовательских институтов. Покоренный греками Египет продолжал жить во многом своей жизнью, но в городах — и, прежде всего, в многолюдной Александрии — жило много греков, говорили по-гречески, и традиции греческой культуры успешно развивались на новой, египетской почве.

В эпоху эллинизма греческая наука приобретает новые черты, наука начинает субсидироваться государством, появляются библиотеки (крупнейшая из них — библиотека при Мусейоне в Александрии — насчитывала до 700 тысяч рукописей), вокруг Мусейона формируется Александрийская научная школа — группа ученых, объединенных общими взглядами и общими традициями. К Александрийской школе (первой в истории научной школе) принадлежал и Евклид, ее традициям следовал он при написании "Начал", и, разбирая "Начала", мы уже рассмотрели основные из этих традиций: выдвижение на первый план безукоризненной строгости, геометрический стиль изложения, отказ от "актуальной бесконечности". Этим традициям следовал не только Евклид, но и другие математики Александрийской школы, наиболее выдающимися из которых были Аполлоний (265—170 гг. до н. э.) и Архимед (287—212 гг. до н. э.). Работы Аполлония посвящены, в основном, коническим сечениям — эллипсу, параболе и гиперболе, свойства которых Аполлоний с удивительным искусством выводит чисто геометрически, не пользуясь никакой алгебраической символикой, еще неизвестной в то время.

Более широкий круг вопросов рассматривался в математических работах Архимеда — одного из наиболее разносторонних и гениальных ученых всех времен. О самом Архимеде мы знаем несколько больше, чем о других математиках древности. Известно, что он родился в 287 году до н. э. в богатом торговом городе Сиракузы в Сицилии, где и провел бóльшую часть жизни, до 212 года до н. э., когда родной город Архимеда был взят римлянами, а сам Архимед убит при штурме. Архимед много раз бывал в Александрии, пользовался ее библиотекой и был в дружеской переписке с александрийскими учеными. Наиболее известны работы Архимеда в области физики ("закон Архимеда" в гидростатике), изобретенные им машины, — например, "Архимедов винт" для подъема воды, а также многочисленные военные машины, которые построил Архимед в трудную пору, когда его родной город был осажден римлянами.

Вот что пишет об этом Плутарх: "римляне напали с двух сторон, и сиракузяне растерялись и притихли от страха, полагая, что им нечем сдержать столь грозную силу. Но тут Архимед пустил в ход свои машины, и в неприятеля, наступавшего с суши, понеслись всевозможных размеров стрелы и огромные каменные глыбы, летевшие с невероятным шумом и чудовищной скоростью, сокрушавшие все на своем пути и приводящие в расстройство боевые ряды. А на римские суда вдруг стали опускаться укрепленные на стенах брусья и либо топили суда силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами, наподобие журавлиных, вытаскивали суда носом вверх из воды, а потом, кормою вперед, пускали ко дну". Далее Плутарх рассказывает, что командовавший римлянами Марцелл отказался от приступов и перешел к блокаде города, поскольку "римляне были запуганы до крайности и, едва заметив на стенке веревку или кусок дерева, поднимали крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них новую машину". В дальнейшем жители Сиракуз настолько уверовали в могущество машин Архимеда, что проявили беспечность, и город был взят внезапной ночной вылазкой. Архимед, как мы уже отмечали, погиб при штурме.

Изумительные военные машины Архимеда в наибольшей мере запечатлелись в памяти современников, но и в области математики Архимед сделал очень много. Так, например, им были найдены площади круга и параболических сегментов, объемы шара, эллипсоида, сегментов шара. В сочинениях Архимеда все найденные им зависимости для площадей и объемов доказываются строго геометрически, — т. е. доказывается, например, методом исчерпывания, по Евдоксу, что разность между объемом шара и величиной $\frac{4}{3}\pi r^3$ может быть сделана сколь угодно малой, но откуда берется сама величина $\frac{4}{3}\pi r^3$ — не поясняется. Но для того, чтобы доказывать, что разность между объемом