

С. М. Натанзон

**Курс
комплексного анализа**

МЦНМО

УДК 517.53.57

ББК 22.16

НЗЗ

Натанзон С. М.

Курс комплексного анализа

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2014

48 с.

ISBN 978-5-4439-2030-6

В книге излагаются основные вопросы теории функций комплексного переменного. Начиная с комплексного дифференцирования, автор доводит изложение до весьма сложных разделов теории, включая недавние достижения в эффективизации теоремы Римана.

Книга основана на записях лекций, которые автор читал в разные годы в Независимом московском университете и в Высшей школе экономики.

Подготовлено на основе книги: *С. М. Натанзон. Курс комплексного анализа.* — М.: МЦНМО, 2012.

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2030-6

© Натанзон С. М., 2012

© МЦНМО, 2014

Содержание

Введение	3
§ 1. Голоморфные функции	4
1.1. Комплексная производная	4
1.2. Дифференциал комплексной функции	5
1.3. Голоморфность	7
1.4. Комплексное интегрирование	8
1.5. Теорема Коши	10
1.6. Первообразная	11
1.7. Интегральная формула Коши	13
1.8. Разложение в ряд Тейлора	14
1.9. Критерий голоморфности	16
1.10. Теорема Вейерштрасса	17
§ 2. Мероморфные функции	17
2.1. Функции, голоморфные в кольце. Ряды Лорана	17
2.2. Изолированные особые точки	19
2.3. Вычеты и интегралы в смысле главного значения	21
2.4. Принцип аргумента	22
2.5. Топологические свойства мероморфных функций	24
§ 3. Теорема Римана	25
3.1. Непрерывные функционалы на компактных семействах функций	25
3.2. Теорема Гурвица и однолистные функции	27
3.3. Аналитическое продолжение	28
3.4. Теорема Римана	29
3.5. Автоморфизмы односвязных областей	30
3.6. Соответствие границ	31
§ 4. Введение в римановы поверхности	31
4.1. Римановы поверхности. Униформизация	31
4.2. Фуксовы группы	32
4.3. Пространство модулей комплексных торов	34
4.4. Аналитические функции	34
§ 5. Эффективизация теоремы Римана	35
5.1. Гармонические функции	35
5.2. Интегральные формулы для гармонических функций	36
5.3. Функция Грина	37
5.4. Задача Дирихле	38
5.5. Формула для голоморфного отображения области в круг	39
5.6. Эффективизация теоремы Римана	44
Литература	46

Введение

Теорема Римана утверждает, что связная односвязная область на комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, переводится биголоморфным (конформным) преобразованием $f_D: D \rightarrow \Lambda$ во внутренность единичного круга $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Это одна из важнейших теорем математики. Более того, проблема вычисления отображения f_D возникает при решении задач гидромеханики, аэромеханики, теории потенциала, теории фильтрации и др. К этим задачам сводятся, в свою очередь, различные прикладные проблемы от проектирования самолетов до поиска и добычи полезных ископаемых, в частности нефти и газа (см. [1], [2] и цитированную там литературу).

Стандартное доказательство существования нужного конформного отображения для произвольной области использует базисные теоремы теории функций комплексного переменного. Эта теорема существования не дает, однако, никаких подходов к вычислению этой функции. До недавнего времени формульные решения существовали лишь для весьма специальных областей, редко встречающихся в приложениях [2]. Для конкретных расчетов использовались численные методы со всеми свойственными такому подходу недостатками.

Прогресс пришел с совершенно неожиданной стороны, когда в работах [8]—[12] была открыта связь между теоремой Римана и фундаментальными разделами современной теоретической физики: интегрируемыми системами, матричными моделями и теорией струн [6], [15], [16]. Оказалось, что на множестве всех областей D с гладкой границей существует универсальная функция F , в терминах которой выражается функция $f_D: D \rightarrow \Lambda$. Теория интегрируемых систем позволила найти ([7], [13], [14]) функцию F в виде ряда Тейлора от естественных параметров, характеризующих область D . Это позволяет эффективизировать формулы для вычисления конформных отображений произвольной области с гладкой границей.

Всем этим вопросам и посвящена настоящая книга. Для ее изучения достаточно стандартных знаний по математическому анализу в объеме 1—2 курса (см., например, [4]). Книга включает в себя вводный курс комплексного анализа, естественным завершением которого является классическая теорема существования Римана. Иллюстрируя значение этой теоремы, мы объясняем ее связь с теорией римановых поверхностей и аналитическими функциями. Эта часть книги в основном совпадает с курсом [3], который наряду с записью лекций первого автора содержит задачи и упражнения, составленные Ю. М Бурманом и С. А. Локтевым.

Далее мы переходим к теории гармонических функций. Эта теория тесно связана с комплексным анализом и активно используется в прикладных задачах. Центральным результатом тут является решение задачи Дирихле с помощью функции Грина.

Далее, используя функцию Грина, мы, следуя [8]—[12], [14], доказываем теорему о существовании универсальной функции F . В заключительном параграфе приводится алгоритм вычисления коэффициентов ряда Тейлора для функции F . Доказательство этого алгоритма требует довольно громоздких комбинаторных вычислений и не приводится в книге. Желающие могут познакомиться с доказательством в работах [13] или [14].

§ 1. Голоморфные функции

1.1. Комплексная производная. Далее под *областью* мы понимаем открытое связное подмножество комплексной плоскости. Соответствие $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$ между вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ и комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ позволяет рассматривать комплекснозначную функцию комплексного переменного как:

- отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(z)$);
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(x, y)$);
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ (обозначение $(u, v) = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$).

Далее мы будем часто переходить от одной интерпретации к другой.

Определение 1.1. Пусть f — отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и $z_0 \in D$. Если предел $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ существует и конечен, то говорят, что $f'(z_0)$ есть *комплексная производная* функции f в точке z_0 .

Рассмотрим теперь f как отображение области вещественной плоскости в вещественную плоскость. Тогда частная производная функции f по любому направлению будет также совпадать с $f'(z_0) = f'(x_0, y_0)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{i\Delta y} = \\
&= -i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).
\end{aligned}$$

Из равенства этих выражений вытекает

Лемма 1.1. *Если функция f имеет комплексную производную в точке z_0 , то в этой точке выполнены*

условия Коши—Римана (Cauchy—Riemann): $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$

Введем теперь важные обозначения:

$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$

Другими словами,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(u + iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Лемма 1.2. *Если функция f имеет комплексную производную в точке z_0 , то*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

1.2. Дифференциал комплексной функции.

Лемма 1.3. *Если функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0) как отображение области вещественной плоскости в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Положим

$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\Delta z = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha(\Delta z)\Delta z. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) &= \\ &= (\Delta x \quad \Delta y) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} + o(|\Delta z|). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1.1. *Функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если и только если соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо и удовлетворяет условиям Коши—Римана.*

Доказательство. Пусть отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0) . Тогда

$$\begin{aligned} (u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) &= \\ &= (\Delta x \quad \Delta y) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + o(|\Delta z|), \end{aligned}$$

где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Поэтому для $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x + i\Delta y) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta \bar{z} + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$