С. П. Иглин

Математические расчеты на базе MATLAB

- **Вариационное исчисление: лекции, лабораторные работы, варианты заданий**
- **Математическая статистика: теория, примеры решения прикладных задач, генерация заданий для студентов**
- **Теория графов: методы решения задач, описание Graph Theory Toolbox**
- **Инструментарий MATLAB: Symbolic Math Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Statistics Toolbox**

+CD

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

С. П. Иглин

Математические расчеты на базе MATLAB

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
И26

Иглин С. П.

И26 Математические расчеты на базе MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 640 с.: ил.

ISBN 5-94157-290-5

Рассматриваются три раздела математики: вариационное исчисление (задачи с закрепленными и подвижными концами, условный экстремум функционалов, численные методы), математическая статистика (обработка массива данных, сравнение выборок, дисперсионный, регрессионный и корреляционный анализ) и теория графов (задачи о максимальном паросочетании, минимальном вершинном покрытии, минимальном остовном дереве, кратчайшем пути, правильной раскраске). Основная направленность книги — применение MATLAB и его расширений: Symbolic Math Toolbox, PDE Toolbox, Optimization Toolbox, Statistics Toolbox и разработанного автором Graph Theory Toolbox. Для всех рассмотренных задач приведены программы их решения, к каждой главе подобрано по 30 вариантов задач для самостоятельного решения. Компакт-диск содержит примеры программ, рассмотренных в книге, и механизм интерактивной работы с пакетом MATLAB.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников технических, компьютерных и экономических специальностей

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Татьяна Лапина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 21.01.05.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 51,6.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-290-5

Содержание

Введение

Одно из направлений развития вычислительных технологий в настоящее время — это появление мощных математических пакетов, позволяющих максимально упростить процесс подготовки задачи, ее решения и анализа результатов. При использовании таких средств, как Maple, Mathcad, Mathematica или MATLAB, решение дифференциального или трансцендентного уравнения, аналитическое либо численное дифференцирование и интегрирование, обращение матрицы, решение проблемы собственных значений, вычисление предела, разложение в ряд и многие другие задачи решаются с помощью одной команды. Но, конечно, эту команду нужно правильно применить: надо корректно сформулировать задачу; знать, в каком виде искать решение и т. д. Иными словами, применение математических пакетов позволяет ускорить и упростить выполнение рутинных действий, выкладок и избавить от появления досадных ошибок, но:

✔ Математические пакеты не избавляют от необходимости думать!

Среди нескольких десятков математических пакетов (четыре из них перечислены ранее) особого внимания заслуживает система инженерных и научных расчетов MATLAB [15, 16, 36]. В отличие от других пакетов, MATLAB в одинаковой мере ориентирован на применение как символических, так и численных методов. Включенное в MATLAB ядро Maple хорошо справляется с символическими вычислениями [58], а сам MATLAB и его многочисленные инструментарии, описанные, например, в [16, 53, 54, 57], прекрасно работают с числами.

Интересная особенность, реализованная разработчиками MATLAB, — это его способность встраиваться в другие приложения Windows и динамически обмениваться с ними данными. Так, автором этой книги предложен механизм интеграции системы MATLAB в Web-страницу [20], который позволяет публиковать в сети Интернет интерактивные учебники с прямым доступом к MATLAB. В частности, именно по такой технологии создана и размещена в Интернете электронная версия данной книги, доступная по адресу [21]. На ней читатель может найти все программы из этой книги, запустить их на счет прямо со страницы и получить нужные ему результаты. Переработанная версия этого сайта размещена на диске, прилагаемом к книге.

Немаловажным фактором широкого распространения этого продукта является также ценовая политика компании MathWorks Inc. (производителя MATLAB), которая позволяет вузам приобретать MATLAB со значительными скидками. Это делает систему MATLAB, на наш взгляд, наиболее подходящей средой для обучения студентов методам решения математических задач.

Всеобщая компьютеризация коснулась и сферы образования. Сегодня уже немыслимо представить изучение математики и различных ее спецкурсов без проведения лабораторных работ в компьютерном классе. Внедрение вычислительной техники в учебный процесс поставило на повестку дня задачу создания учебников по различным дисциплинам, ориентированных на применение компьютеров и, в частности, на использование математических пакетов. Например, широко распространенные учебники по вариационному исчислению [3, 7, 14, 28, 30, 41, 45, 48] были написаны в 70-е годы прошлого столетия или даже раньше. Несомненно, они остаются прекрасными в научном и методическом плане книгами. Но их авторы не предвидели и не могли предвидеть столь бурной компьютеризации. Поэтому необходима адаптация курса вариационного исчисления к использованию современных компьютерных технологий. Первые попытки в этом направлении — [19, 35]. *Часть I* этой книги, посвященная вариационному исчислению, написана на основе [19].

Несколько иная ситуация сложилась в математической статистике. Здесь также в классических учебниках, задачниках и пособиях [6, 8—11, 25, 31, 37, 38, 44, 47] мало затрагиваются проблемы использования вычислительной техники, хотя сама постановка задач математической статистики уже предполагает такое использование, и в каждом математическом пакете есть даже специальный инструментарий для решения задач статистики. В MATLAB это [57]. Многие его функции описаны в справочниках [16, 36] и на странице [42]. Из зарубежных изданий можно отметить [49, 50, 55]. Однако систематического изложения вузовского курса математической статистики с решением задач в среде MATLAB автору найти не удалось. Восполнить этот пробел призвана *часть II* книги, посвященная математической статистике. Ее основа — методическое пособие [23].

И уж совсем парадоксальная ситуация сложилась в теории графов. В классических учебниках [5, 18, 32, 43] реализации алгоритмов на ЭВМ уделяется значительное внимание. Множество различных программ описано в [2]. Книга [33] посвящена анализу алгоритмов комбинаторной оптимизации, в том числе и теории графов. Однако создатели математических пакетов почему-то обошли эти задачи стороной. Только в Maple есть средства для решения задач теории графов [12]. Некоторые задачи дискретной математики решены с помощью MATLAB в [26]. Но отдельного инструментария MATLAB для решения задач теории графов до недавних пор не было. Лишь в конце 2003 года автором этой книги был разработан и размещен на сайте компании MathWorks Inc. набор функций (инструментарий) для решения задач на графах GrTheory Toolbox. Он доступен для свободного копирования по адресу [51], страница "Mathematics — General" ("Математика — общие вопросы"), и на момент написания этой книги (октябрь 2004 года) входит в десятку лидеров данной категории. Некоторые функции этого пакета описаны в [22]. В *части III* книги различные задачи теории графов решаются с помощью функций GrTheory Toolbox.

Структура и содержание книги

Настоящая книга написана на основе лекций, практических и лабораторных занятий по различным математическим курсам, которые автор на протяжении 20 лет преподает студентам Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". Она состоит из введения, трех частей, двух приложений и списка литературы. Во введении, которое вы сейчас читаете, дается краткий обзор содержания книги и список программного обеспечения, которое необходимо для полноценной работы с ней. Каждая из трех частей включает главы, посвященные соответственно вариационному исчислению, математической статистике и теории графов. В *приложении 1* рассмотрены некоторые приемы программирования в среде MATLAB. Если вы раньше не работали с этим пакетом, чтение книги целесообразно начать с него. В *приложении 2* описано содержимое компакт-диска, прилагаемого к книге.

Почти все главы книги построены примерно одинаково. Вначале излагается теория. Здесь читатель найдет готовый конспект лекций по данной теме. Далее (или в конце главы) следуют вопросы для самопроверки. Затем рассматривается решение примеров и составление программ. Решение везде доводится до численного результата, обычно с построением графика или рисунка. *Глава 26* посвящена генерации вариантов индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), а для *части I* на диске, приложенном к книге, имеются по 30 вариантов ИДЗ по каждой теме. Содержание диска описано в *приложении 2*.

Для облегчения перекрестных ссылок все формулы, определения, теоремы, рисунки и т. п. имеют двойную нумерацию, включающую номер главы. Конец примера, определения или доказательства отмечен символом □.

Необходимое программное обеспечение

Электронная версия, размещенная на диске, представляет переработанный вариант сайта автора [21], включая механизм взаимосвязи с MATLAB. Для ее чтения понадобится Internet Explorer версии 4.0 или выше. Другие браузеры, в частности Netscape Commuunicator, Bat! или Opera, не поддерживают в должной мере всевозможные динамические эффекты. Поэтому при написании электронного варианта этой книги был использован Internet Explorer и язык программирования VBScript. Как правило, при установке на компьютер системы Windows автоматически устанавливается и Internet Explorer.

В корневом каталоге диска-приложения находится главный файл книги index.html. Загрузив его, вы попадете в оглавление. Далее следуйте по обычным перекрестным ссылкам. Документ можно загрузить как непосредственно с компакт-диска, так и переписав предварительно все его содержимое на жесткий диск компьютера, сохраняя структуру папок. При этом никакой инсталляции не требуется: весь документ состоит только из Web-страниц, рисунков к ним, таблиц стилей и файлов сценариев.

В электронный вариант книги, размещенный на диске, встроен механизм взаимосвязи с MATLAB, описанный в [20]. Для правильной совместной работы с MATLAB нужно изменить некоторые настройки вашего обозревателя. Выполните следующие действия.

1. Войдите в меню **Сервис | Свойства обозревателя**.
2. Откройте страницу **Безопасность**.
3. Выберите зону **Интернет**.
4. Включите уровень безопасности **Другой**.
5. Найдите переключатель **Использование элементов ActiveX, не помеченных как безопасные** (это в конце страницы). Переключите флажок в положение **Предлагать**, как показано на рис. 1.
6. Нажмите кнопку **OK**, чтобы принять изменение, и обновите загрузку страницы.

Теперь ваш обозреватель, загрузив страницу с диска или через Интернет, сможет подключить MATLAB, установленный на вашем локальном компьютере (если он, конечно, есть). Не забудьте при загрузке страницы ответить **Да** на вопрос: **Разрешить ли загрузку ActiveX-элементов, не помеченных как безопасные?**

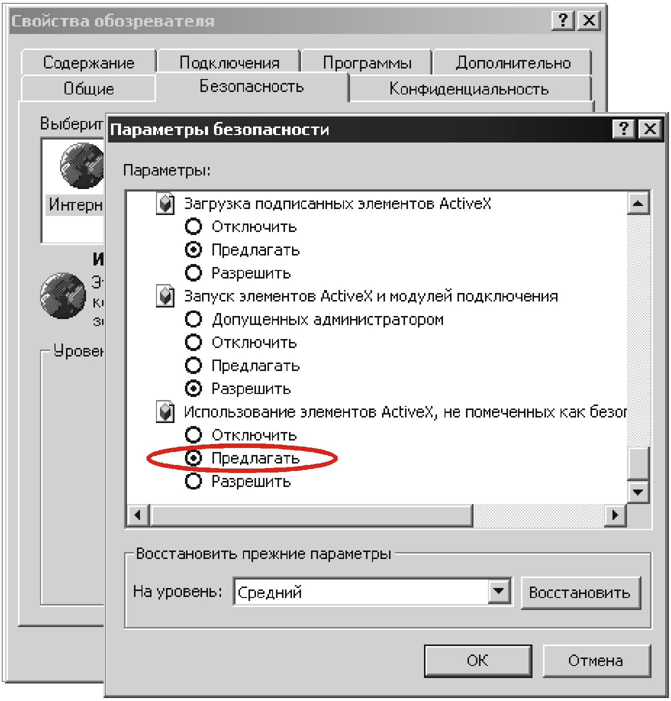


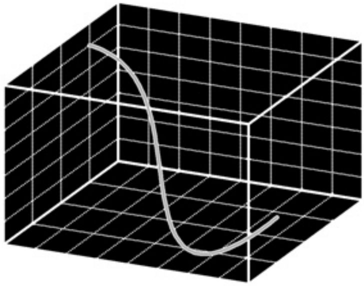
Рис 1. Настройка обозревателя на совместную работу с MATLAB

Далее, на вашем компьютере должен быть инсталлирован MATLAB версии 5, 6 или 7. Если у вас его нет, то вы сможете только читать электронную версию книги в интерактивном режиме, но не сможете считать свои варианты задач. Для полноценной работы с книгой установите MATLAB. Полная его версия занимает диск или два и требует для своей установки более 800 Мбайт. Но если отказаться от некоторых инструментариев (в MATLAB они называются Toolboxes), то можно значительно сократить объем дискового пространства. При решении задач из этой книги нам понадобятся следующие инструментарии:

- **Symbolic Toolbox** (инструментарий для символьных вычислений);
- **Partial Differential Equations Toolbox**, или сокращенно **PDE Toolbox** (инструментарий для дифференциальных уравнений в частных производных);
- **Optimization Toolbox** (инструментарий для оптимизации);
- **Statistics Toolbox** (инструментарий для статистики).

Их инсталлируйте обязательно. Для экономии места можно также ограничиться одной из двух справочных служб: или в формате HTML, или в формате PDF. Первая доступна для просмотра через тот же Internet Explorer, а вторая — через Acrobat Reader. Они полностью дублируют друг друга.

К сожалению, в некоторых вариантах 6-й версии MATLAB есть проблемы с кодировкой символов кириллицы. Так, буква я (ASCII-код 255, т. е. все единицы в двоичной системе), видимо, используется разработчиками MATLAB в своих, служебных целях, т. к. она не воспринимается даже в комментариях. Поэтому, если у вас установлена такая версия, замените везде в областях ввода маленькую букву я на большую Я.



ЧАСТЬ I

Вариационное исчисление

Глава 1. Введение в вариационное исчисление

Глава 2. Элементарная задача вариационного исчисления

Глава 3. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Глава 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Глава 5. Функционалы, зависящие от функции нескольких переменных

Глава 6. Вариационная задача в параметрической форме

Глава 7. Естественные граничные условия

Глава 8. Условия трансверсальности

Глава 9. Отражение экстремалей

Глава 10. Преломление экстремалей

Глава 11. Экстремали с угловыми точками

Глава 12. Односторонние вариации

Глава 13. Достаточные условия экстремума

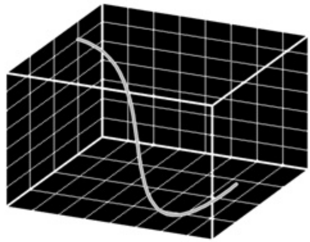
Глава 14. Условный экстремум функционалов

Глава 15. Метод начальных параметров

Глава 16. Метод конечных разностей (МКР)

Глава 17. Метод Ритца

ГЛАВА 1



Введение в вариационное исчисление

1.1. Основная задача вариационного исчисления

При рассмотрении новых объектов их стараются связать с уже знакомыми. И мы при изучении курса вариационного исчисления будем опираться на известные нам определения математического анализа.

До сих пор в обычном курсе анализа вы имели дело с *функциями*. В вариационном исчислении мы встретимся с новым видом математических объектов — *функционалами*. Чем же отличаются функционалы от функций? Давайте вспомним известное вам определение функции.

Определение 1.1. *Функцией* называется любое правило, по которому заданному числу x из некоторого их множества ставится в соответствие число y. □

Мы обозначаем функцию так:

$$y = y(x). \tag{1.1}$$

Множество чисел x, для которых определена функция y, называется *областью определения функции*. Обычно область определения функции — это интервал или система интервалов (открытых, полуоткрытых, закрытых), или вся числовая ось. Хотя, в общем случае, это не обязательно.

Если *числу* α ставится в соответствие *функция*, то α тоже является функцией, но уже зависящей от параметра:

$$y = y(x, \alpha). \tag{1.2}$$

Ее можно рассматривать как функцию двух аргументов.

А вот если *функции* ставится в соответствие *число*, то это будет функционал.

Определение 1.2. *Функционалом* называется любое правило, по которому заданной функции $y(x)$ из некоторого их множества ставится в соответствие число J. □

Обозначим функционал так:

$$J = J(y(x)). \tag{1.3}$$

Множество функций $y(x)$, на которых определен функционал J, назовем *классом функций.*

В (1.3) записан простейший случай зависимости. В общем случае функционал J может зависеть не от одной, а от нескольких функций, причем функции могут быть нескольких переменных. Функционал J может зависеть также от производных этих функций.

Функционал (1.3) можно рассматривать как функцию очень большого (в пределе — бесконечного) числа переменных — значений функции $y(x)$ в различных точках $x \in [a, b]$, как показано на рис. 1.1.

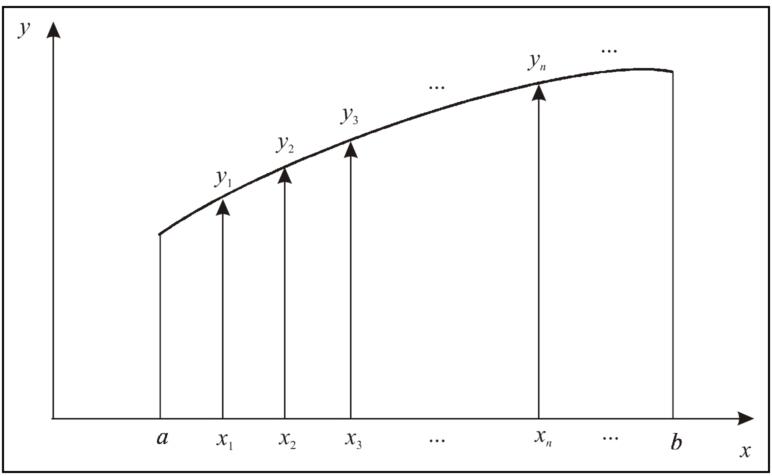


Рис. 1.1. Функционал — это предел функции многих переменных

Вместо $J(y(x))$, как было в (1.3), мы здесь записываем:

$$J = J(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots). \tag{1.4}$$

Конечно, такая аналогия весьма условна. В обычной функции многих переменных значения, например, аргументов y_2 и y_3 могут сильно отличаться друг от друга (если это допускается областью определения функции). В функционале ситуация принципиально иная. Например, если функция $y(x)$ — непрерывная, то значения соседних аргументов не могут сильно отличаться. Если $y(x)$ — дифференцируемая, то, к примеру, в точке y_2 не может быть излома, и т. д. Но с другой стороны, эта аналогия полезна, т. к. она используется в численных методах *(см. главу 16)*.

ПРИМЕР 1.1. Длина линии, соединяющей точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, — это функционал:

$$J\left(y\left(x\right)\right)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{1.5}$$

Здесь классом функций, на котором определен наш функционал, является множество дифференцируемых на $[x_1, x_2]$ функций, проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Дифференцируемых — потому что нам нужно вычислять производную от функций $y(x)$; проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — потому что так задано в условии задачи. □

Определение 1.3. *Основной задачей вариационного исчисления* является исследование на экстремум функционалов, т. е. нахождение таких функций (из данного класса), которые доставляют функционалу наибольшее или наименьшее значение. Такие функции называются *экстремалями*. □

Так, в примере 1.1 экстремалью является прямая, соединяющая точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$: эта функция доставляет минимум функционалу (1.5) на соответствующем классе.

1.2. Классические задачи и принципы вариационного исчисления

Задачи, связанные с исследованием функционалов на экстремум, интересовали человечество давно. Из глубокой древности до нас дошли *четыре классические задачи вариационного исчисления*. Это задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о якорной цепи и задача о геодезических линиях.

Задача Дидоны. По одному из мифов, Дидона (рис. 1.2) была сестрой финикийского царя Пигмалиона, который убил ее мужа, чтобы воспользоваться его богатством. Она покинула Финикию и поселилась в Северной Африке, где царь Иарб обещал дать ей столько земли, сколько покроет воловья шкура. Дидона разрезала шкуру на тонкие ремни и отмерила ими участок, на котором основала город Карфаген (рис. 1.3). А задача, которую решила Дидона, стала классической задачей вариационного исчисления: линией заданной длины L, соединяющей точки $O(0, 0)$ и $M_2(x_2, 0)$, требуется охватить максимальную площадь S, расположенную под линией и выше оси Ox (рис. 1.4). Здесь мы выбрали систему координат так, чтобы ее начало совпало с одним

Рис. 1.2. Дидона

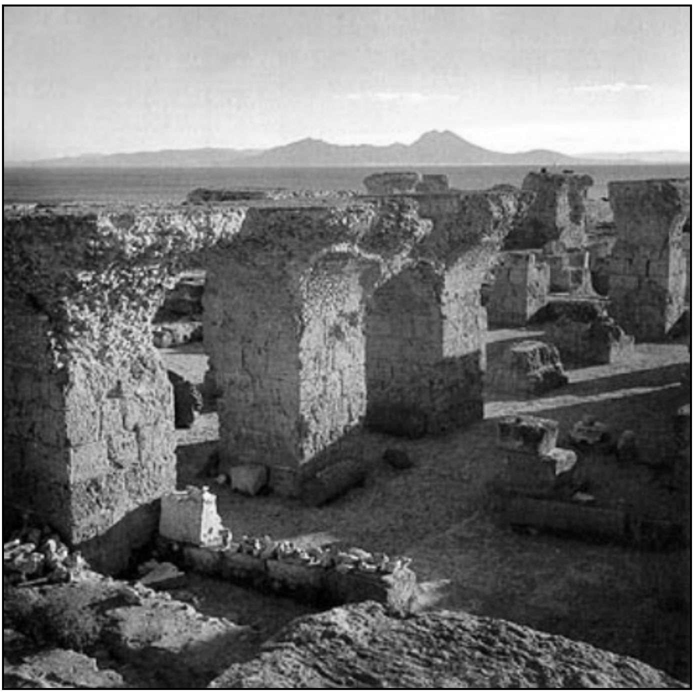


Рис. 1.3. Развалины Карфагена (Тунис)

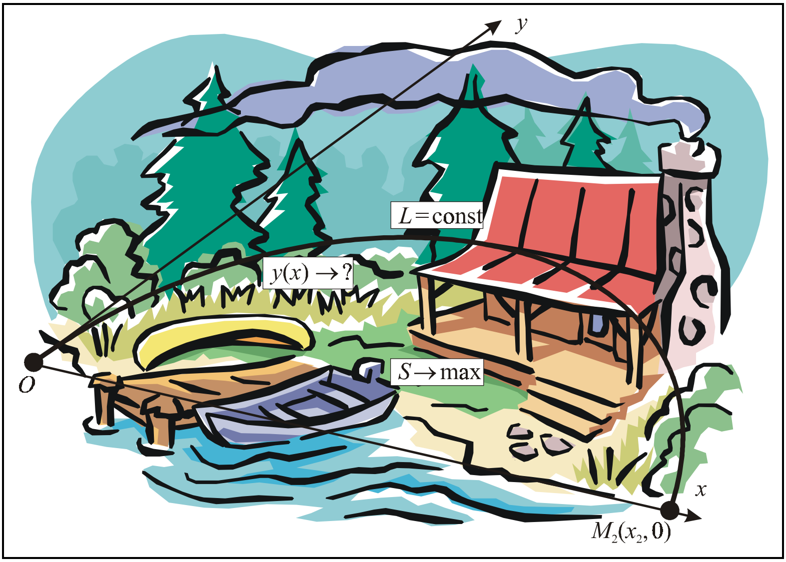


Рис. 1.4. Задача Дидоны

из концов линии, ось Ox направили вдоль береговой линии, а ось Oy — перпендикулярно ей вглубь суши. □

Если правый конец x_2 неподвижен, то решением задачи Дидоны будет *сегмент круга*, а если может скользить вдоль оси Ox — то *полукруг*. Эта задача относится к классу *изопериметрических* (линия имеет постоянный периметр, т. е. длину). Мы будем решать ее в *главе 14*.

Оценим, какую площадь имел Карфаген в момент его основания. Воловья шкура имеет площадь $S_{ш} \approx 2\text{ м}^2$. С помощью примитивных инструментов ее можно разрезать на полоски шириной $h \approx 5$ мм. Длина полученной веревки $l = S_{ш}/h \approx 400$ м. Этой веревкой можно охватить полукруг радиуса $R = l/\pi \approx 127{,}3$ м. Площадь такого полукруга $S_{г} = \pi R^2/2 \approx 25\,465\text{ м}^2$. Два с половиной гектара — не очень-то и много.

Обобщением этой задачи является *взвешенная задача Дидоны*. Здесь разные участки земли имеют разную стоимость:

$$c = c(x, y), \tag{1.6}$$

и требуется максимизировать не площадь $S(y(x))$, а суммарную стоимость земельного участка:

$$C\big(y(x)\big) = \int_0^{x_2} \left(\int_0^{y(x)} c(x, y)\, dy \right) dx \to \max. \tag{1.7}$$

Решение этой задачи — уже не обязательно дуга окружности. Если, например, прибрежные участки более ценные, чем расположенные вдали от берега, то граница города растянется вдоль береговой линии, как показано на рис. 1.5.

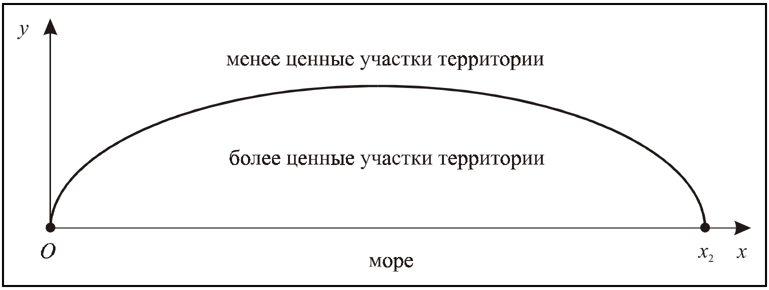


Рис. 1.5. Взвешенная задача Дидоны

Задача о брахистохроне. *Брахистохрона* (от греч. βραχιστοσ — кратчайший и χρονοσ — время) в узком смысле слова — это кривая наискорейшего спуска, т. е. та из всевозможных кривых, соединяющих две точки O и M_2, вдоль которой материальная точка, катящаяся без трения из точки O под действием силы тяжести, в кратчайшее время достигнет точки M_2 (рис. 1.6).

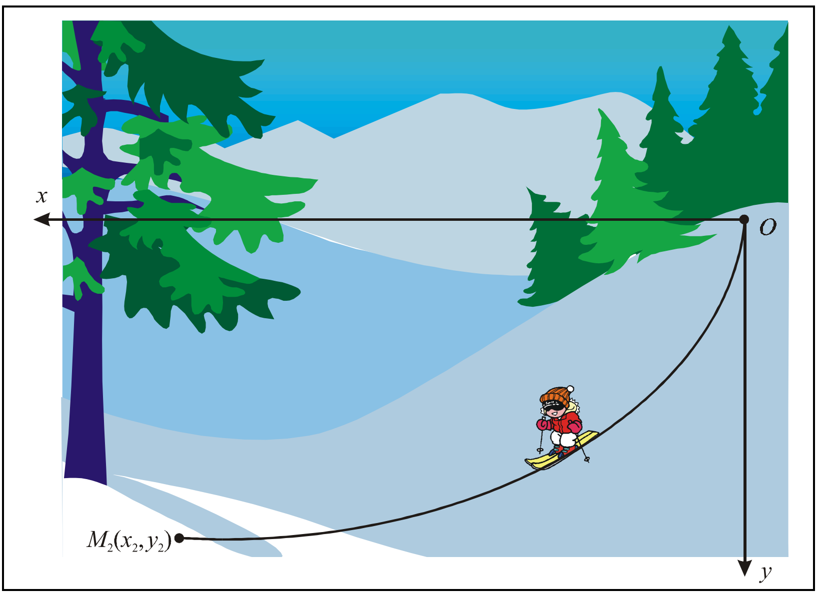


Рис. 1.6. Задача о брахистохроне

Начало системы координат на рисунке мы поместили в точку старта, ось Ox направили горизонтально вдоль траектории движения (она считается плоской), а ось Oy — вертикально вниз. □

Если вы заранее не знаете, то вряд ли догадаетесь, что решением этой задачи является *циклоида*. Да, да, та самая циклоида — след точки на ободе колеса, которое катится без трения по оси Ox. Мы решим эту задачу в *главе 2*.

Брахистохрона в широком смысле слова — это также линия наискорейшего прохождения дистанции, но уже не обязательно в поле силы тяжести. Например, согласно *принципу Ферма* (Pierre Férmat, 1601—1665, рис. 1.7), свет, распространяясь в среде с переменной оптической плотностью (показателем преломления) $n(x, y)$, движется именно по брахистохроне. Он стремится прийти из точки $M_1(x_1, y_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2)$ за минимально возможное время. И линией, по которой он распространяется, уже будет не обязательно прямая (рис. 1.8). Чтобы минимизировать время прохождения дистанции, большую часть своего пути свет стремится пройти в среде с меньшей оптической плотностью (его скорость там выше). □

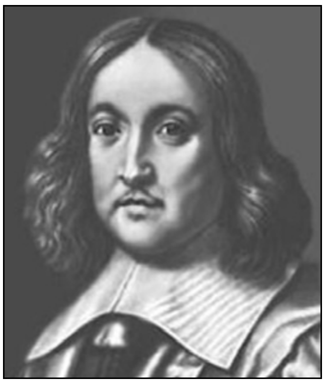


Рис. 1.7. П. Ферма

Рис. 1.8. Распространение света (принцип Ферма)

Задача о якорной цепи. Найти форму провисания якорной цепи. Или, что то же самое, найти форму провисания тонкой абсолютно гибкой нерастяжимой нити, соединяющей точки M_1 и M_2 (рис. 1.9). □

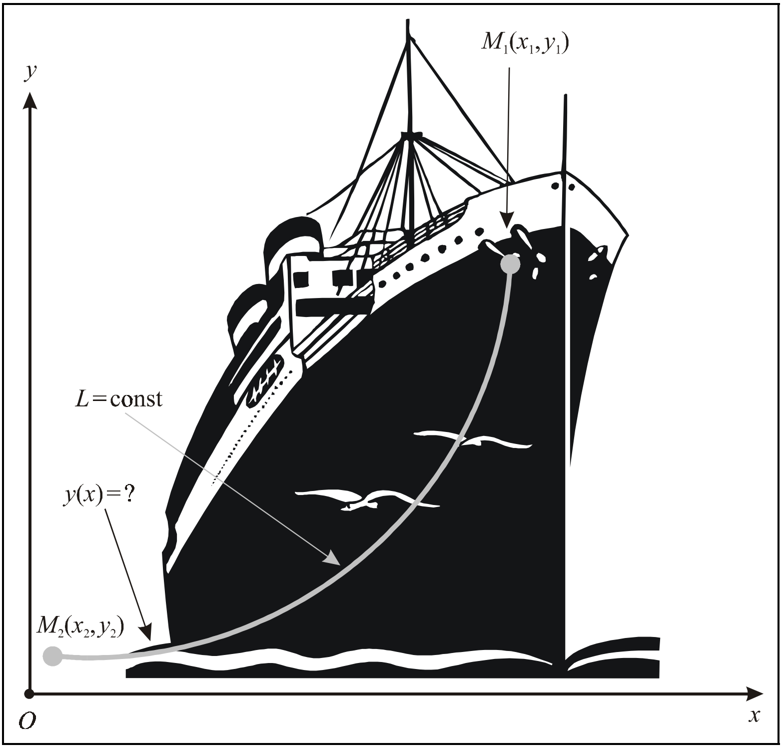


Рис. 1.9. Задача о якорной цепи

Решением этой задачи является гиперболический косинус, который иногда так и называют: цепная линия.

Как и задача Дидоны, эта задача является изопериметрической, и мы решим ее в *главе 14*.

Конечно, у этой задачи также есть обобщения: линия может быть переменной плотности, иметь конечную гибкость, быть растяжимой и т. д.

Задача о геодезической линии. На заданной поверхности требуется найти линию минимальной длины, которая соединяет две заданные точки поверхности M_1 и M_2 (рис. 1.10). □

Решение этой задачи зависит от вида поверхности. В *главе 14* мы рассмотрим пример решения для одной конкретной поверхности.

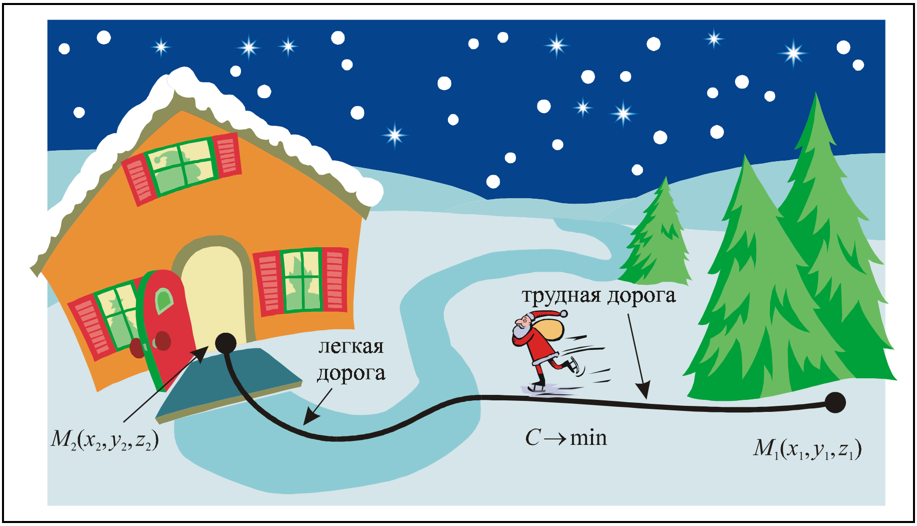


Рис. 1.10. Задача о взвешенной геодезической линии

Обобщение этой задачи — нахождение взвешенной геодезической линии, когда на поверхности распределена некоторая весовая функция c, и требуется минимизировать общий вес пути.

На рис. 1.10 показана как раз такая ситуация: по дорожке нашему Деду Морозу бежать легко, а по снегу — трудно. Поэтому он интуитивно выбирает более длинный, но быстрый путь: сначала как можно скорее стремится выйти на дорожку, а потом движется по ней. Хорошей иллюстрацией к задаче о геодезической линии является пословица "Умный в гору не пойдет, умный гору обойдет".

Если проанализировать эти классические задачи, то видно, что их можно разбить на две группы. В одних задачах мы сами пытаемся улучшить решение: максимизировать площадь, минимизировать путь и т. д. Типичные примеры — это задача Дидоны и задача о геодезической линии. Другие задачи являются следствием некоторых основополагающих принципов (законов природы). Так, распространение света по брахистохроне является следствием принципа Ферма, форма провисания якорной цепи — это следствие известного закона механики: любое тело стремится занять положение устойчивого равновесия, когда его энергия минимальна.

Подобные законы, сформулированные как задачи вариационного исчисления, носят название *вариационных принципов*. С одним из них мы уже познакомились — это принцип Ферма. Другой важный вариационный принцип, который часто применяется в механике, — это *принцип Остроградского — Га-*

Рис. 1.11. М. В. Остроградский

Рис. 1.12. У. Р. Гамильтон

мильтона (Михаил Васильевич Остроградский, 1801—1862, рис. 1.11, и Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton), 1805—1865, рис. 1.12).

Принцип Остроградского — Гамильтона. Среди всех возможных (т. е. совместимых со связями) движений системы материальных точек в действительности осуществляется такое, которое доставляет стационарное значение функционалу S. Он называется "действие по Остроградскому — Гамильтону" и вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(T - U \right) dt \,, \tag{1.8}$$

где T — кинетическая энергия системы, U — ее потенциальная энергия, t — время, $[t_1, t_2]$ — интервал времени, на котором рассматривается движение системы. □

Таким образом, законы движения механических систем могут быть получены как следствие вариационного принципа Остроградского — Гамильтона. В следующих главах мы научимся выводить эти законы.

1.3. Классы функций

Давайте вспомним, как мы определяли экстремум функции нескольких переменных

$$y = y(x_1, x_2, ..., x_n) = y(\mathrm{x}). \tag{1.9}$$

Здесь вектор аргументов обозначен x.

Определение 1.4. Точка x_0 называется точкой *минимума* функции $y(x)$, если эту точку x_0 можно окружить некоторой малой δ-окрестностью, в которой $\forall x$ выполняется условие: $y(x) \geq y(x_0)$. Если при этом $\forall x$ из этой δ-окрестности, кроме x_0, будет выполняться $y(x) > y(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 достигается *строгий минимум*. Аналогично дается определение *максимума (строгого максимума)*. □

Хотелось бы таким же образом определить экстремум и для функционалов, но что такое δ-окрестность *функции*? Для точки $x \in R_n$ мы под δ-окрестностью точки x_0 понимаем n-мерный круг радиуса δ с центром в точке x_0.

Определение 1.5. *δ-окрестность* точки x_0 — это множество точек x, для которых выполняется условие:

$$\left| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{0i} \right)^2} < \delta . \ \square \qquad (1.10)$$

Здесь x_i — координаты точки x, а x_{0i} — координаты x_0. Для $n = 2$ малая δ-окрестность точки x_0 показана на рис. 1.13.

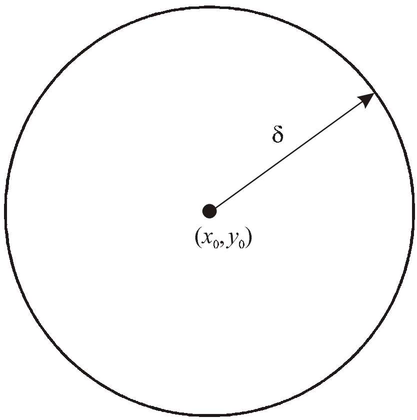


Рис. 1.13. δ-окрестность точки x_0 в смысле (1.10)

Правильнее было бы сказать так: мы вначале определили для точки $x \in R_n$ *норму*, как квадратный корень из суммы квадратов ее координат, потом ввели понятие *расстояния* (норма разности), а затем уже определили δ-окрестность точки x_0 как такое множество точек, для которых их расстояние до x_0 меньше δ. Попробуем пойти по этому же пути для функций. Более подробно эти вопросы рассматриваются в курсе *функционального анализа*. Здесь мы ограничимся только теми понятиями, которые будут нам нужны для решения задач вариационного исчисления.

Функцию $f(x)$ на $[a, b]$ можно рассматривать как ∞-мерный вектор (см. рис. 1.1): координатные оси — это значения $x \in [a, b]$, а сами значения координат — это значения функции $f(x)$. Вместо суммы, участвующей в определении 1.5, мы можем записать, например, интеграл. Тем самым мы определим некоторый *класс функций*.

Определение 1.6. *Классом функций* L_2 на $[a, b]$ называется множество функций, интегрируемых в квадрате на $[a, b]$, для которых норма вычисляется по формуле

$$\| f(x) \|_{L_2} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx}\,. \; \square \tag{1.11}$$

Если возможны различные толкования, название класса проставляют в виде индекса внизу после определения нормы. Саму норму обозначают не одинарными вертикальными черточками, как модуль, а двойными. В определении 1.6 требуется, чтобы функция была интегрируемой в квадрате на $[a, b]$, т. к. там вычисляется такой интеграл.

Используя определение 1.6, можно ввести понятие δ-окрестности функции $y_0(x)$ в классе L_2. Это такие функции $y(x)$, для которых норма разности их от $y_0(x)$ меньше δ:

$$\| y(x) - y_0(x) \|_{L_2} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(y(x) - y_0(x) \right)^2 dx} < \delta. \tag{1.12}$$

ПРИМЕР 1.2. Посмотрите на рис. 1.14. Здесь сплошной жирной линией нарисована исходная функция $y_0(x)$, а еще две функции нарисованы так: сплошной тонкой линией — $y_1(x)$, а штриховой — $y_2(x)$.

Функция $y_2(x)$ отличается от $y_0(x)$ значительно, но только на небольшом интервале. Наоборот, $y_1(x)$ отличается от $y_0(x)$ хоть и не так сильно, но на всем отрезке $[a, b]$. Площадь между $y_1(x)$ и $y_0(x)$ больше площади между $y_2(x)$ и $y_0(x)$. Поэтому, если вычислять по (1.12) расстояние (норму разности) между $y_1(x)$ и $y_0(x)$, с одной стороны, и $y_2(x)$ и $y_0(x)$ с другой, то окажется, что

$$\| y_1(x) - y_0(x) \|_{L_2} > \| y_2(x) - y_0(x) \|_{L_2}\,. \; \square \tag{1.13}$$

С классом функций L_2 вы имели дело в теории рядов Фурье. Там, в частности, доказывается, что из всех тригонометрических многочленов степени n наилучшее приближение к функции $y(x)$ в смысле (1.12) имеет такой многочлен, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами Фурье функции $y(x)$. На этом далее строится доказательство сходимости рядов Фурье.