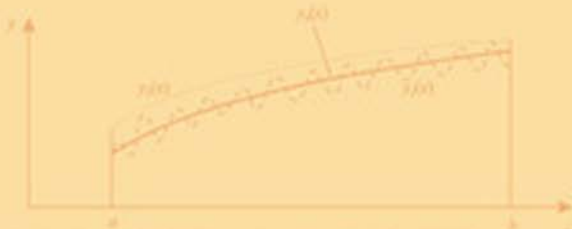


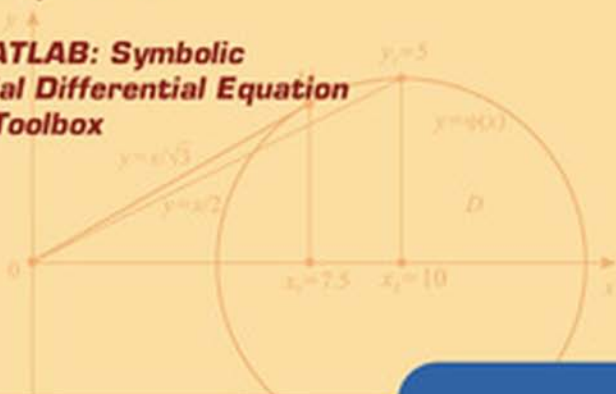
```
Sol=dsolve('degEuler','x')
```



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА БАЗЕ **MATLAB**

- *Вариационное исчисление: лекции, лабораторные работы, варианты заданий*
- *Математическая статистика: теория, примеры решения прикладных задач, генерация заданий для студентов*
- *Теория графов: методы решения задач, описание Graph Theory Toolbox*
- *Инструментарий MATLAB: Symbolic Math Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Statistics Toolbox*

```
function [q,g,h,r]=  
r=axis(0,7);  
q=2*pi*cos(1/200); g=2  
h=cos(1/2*pi); r=  
=sqrt(1+(1/200)^2);  
y1=p(2,0); y2=p(2,  
x0=-1; x1=y; y1=y  
r=1; x1=1.7400.*x2;
```



С. П. Иглин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ
НА БАЗЕ МАТЛАВ**

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2005

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
И26

Иглин С. П.

И26 Математические расчеты на базе MATLAB. — СПб.:
БХВ-Петербург, 2005. — 640 с.: ил.

ISBN 5-94157-290-5

Рассматриваются три раздела математики: вариационное исчисление (задачи с закрепленными и подвижными концами, условный экстремум функционалов, численные методы), математическая статистика (обработка массива данных, сравнение выборок, дисперсионный, регрессионный и корреляционный анализ) и теория графов (задачи о максимальном паросочетании, минимальном вершинном покрытии, минимальном остовном дереве, кратчайшем пути, правильной раскраске). Основная направленность книги — применение MATLAB и его расширений: Symbolic Math Toolbox, PDE Toolbox, Optimization Toolbox, Statistics Toolbox и разработанного автором Graph Theory Toolbox. Для всех рассмотренных задач приведены программы их решения, к каждой главе подобрано по 30 вариантов задач для самостоятельного решения. Компакт-диск содержит примеры программ, рассмотренных в книге, и механизм интерактивной работы с пакетом MATLAB.

*Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников
технических, компьютерных и экономических специальностей*

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Татьяна Лапина</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольги Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн обложки	<i>Игоря Цырульникова</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 21.01.05.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 51,6.

Тираж 3000 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-290-5

© Иглин С. П., 2005
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2005

Содержание

Введение	11
Структура и содержание книги.....	13
Необходимое программное обеспечение.....	14
ЧАСТЬ I. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	17
Глава 1. Введение в вариационное исчисление	19
1.1. Основная задача вариационного исчисления.....	19
1.2. Классические задачи и принципы вариационного исчисления.....	21
1.3. Классы функций.....	28
1.4. Экстремум функционала.....	39
1.5. Непрерывность и варьируемость функционала.....	40
1.6. Вариация функционала.....	45
1.7. Необходимое условие экстремума функционала.....	48
1.8. Основная лемма вариационного исчисления.....	48
1.9. Вопросы для самопроверки.....	52
Глава 2. Элементарная задача вариационного исчисления	54
2.1. Дифференциальное уравнение Эйлера.....	54
2.2. Частные случаи уравнений Эйлера.....	61
2.2.1. Подынтегральная функция F не зависит явно от y'	61
2.2.2. Подынтегральная функция F линейно зависит от y'	62
2.2.3. Подынтегральная функция F не зависит явно от y'	63
2.2.4. Подынтегральная функция F зависит только от y'	65
2.2.5. Подынтегральная функция F не зависит явно от x	66
2.3. Вопросы для самопроверки.....	69
2.4. Примеры выполнения заданий.....	70
2.4.1. Задание 1.....	70
2.4.2. Задание 2.....	75
2.4.3. Задание 3.....	78
2.5. Задание.....	80

Глава 3. Функционалы, зависящие от нескольких функций	81
3.1. Система дифференциальных уравнений Эйлера	81
3.2. Вопросы для самопроверки.....	84
3.3. Пример выполнения задания.....	84
3.4. Задание	89
Глава 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков.....	90
4.1. Дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона	90
4.2. Вопросы для самопроверки.....	95
4.3. Пример выполнения задания.....	95
4.4. Задание	99
Глава 5. Функционалы, зависящие от функции нескольких переменных	100
5.1. Дифференциальное уравнение Эйлера — Остроградского	100
5.2. Вопросы для самопроверки.....	106
5.3. Пример выполнения задания.....	107
5.4. Задание	120
Глава 6. Вариационная задача в параметрической форме	121
6.1. Когда это нужно?	121
6.2. Переход к параметру в элементарной задаче вариационного исчисления	122
6.3. Вопросы для самопроверки.....	124
Глава 7. Естественные граничные условия	125
7.1. Элементарная задача вариационного исчисления без граничного условия	125
7.2. Функционал, зависящий от нескольких функций, без граничного условия.....	129
7.3. Вопросы для самопроверки.....	131
7.4. Примеры выполнения заданий.....	131
7.4.1. Задание 1.....	131
7.4.2. Задание 2.....	135
7.4.3. Задание 3.....	140
7.5. Задание	143
Глава 8. Условия трансверсальности	144
8.1. Условия трансверсальности в элементарной задаче вариационного исчисления	144
8.2. Условия трансверсальности для функционала, зависящего от двух функций ...	150
8.3. Вопросы для самопроверки.....	154
8.4. Примеры выполнения заданий.....	155
8.4.1. Задание 1.....	155
8.4.2. Задание 2.....	159
8.4.3. Задание 3.....	166
8.5. Задание	173
Глава 9. Отражение экстремалей	174
9.1. Отражение экстремалей в элементарной задаче вариационного исчисления	174
9.2. Вопросы для самопроверки.....	178

9.3. Пример выполнения задания.....	178
9.4. Задание.....	184
Глава 10. Преломление экстремалей.....	185
10.1. Преломление экстремалей в элементарной задаче.....	185
10.2. Вопрос для самопроверки.....	189
10.3. Пример выполнения задания.....	189
10.4. Задание.....	195
Глава 11. Экстремали с угловыми точками.....	196
11.1. Откуда берутся угловые точки?.....	196
11.2. Вопросы для самопроверки.....	200
Глава 12. Односторонние вариации.....	201
12.1. Запрет на пребывание экстремали в заданной области.....	201
12.2. Вопрос для самопроверки.....	206
12.3. Пример выполнения задания.....	206
12.4. Задание.....	210
Глава 13. Достаточные условия экстремума.....	211
13.1. Собственное и центральное поле.....	211
13.2. Поле экстремалей.....	214
13.3. Функция Вейерштрасса.....	216
13.4. Достаточные условия Вейерштрасса экстремума функционала.....	219
13.5. Достаточные условия Лежандра экстремума функционала.....	224
13.6. Вопросы для самопроверки.....	225
Глава 14. Условный экстремум функционалов.....	227
14.1. Вариационная задача для функционала с голономными ограничениями.....	227
14.2. Вариационная задача с неголономными ограничениями.....	234
14.3. Изопериметрические задачи.....	235
14.4. Вопросы для самопроверки.....	242
14.5. Примеры выполнения заданий.....	242
14.5.1. Задание 1.....	242
14.5.2. Задание 2.....	246
14.5.3. Задание 3.....	249
14.6. Задание.....	252
Глава 15. Метод начальных параметров.....	253
15.1. Метод стрельбы, начальных параметров, матричной прогонки.....	253
15.2. Вопросы для самопроверки.....	258
15.3. Примеры выполнения заданий.....	258
15.3.1. Задание 1.....	258
15.3.2. Задание 2.....	262
15.3.3. Задание 3.....	267
15.4. Задание.....	271

Глава 16. Метод конечных разностей (МКР)	272
16.1. МКР для вариационных задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями.....	272
16.2. МКР для вариационной задачи в частных производных: прямоугольная сетка	274
16.3. МКР для вариационной задачи в частных производных: треугольная сетка ...	276
16.4. Вопросы для самопроверки.....	280
16.5. Примеры выполнения заданий.....	280
16.5.1. Задание 1.....	280
16.5.2. Задание 2.....	283
16.6. Задание	288
Глава 17. Метод Рунге	289
17.1. Применение метода Рунге к одномерным задачам.....	289
17.2. Метод Рунге в применении к двумерным задачам	290
17.3. МКР + метод Рунге \Rightarrow МКЭ.....	292
17.4. Вопросы для самопроверки.....	295
17.5. Примеры выполнения заданий	295
17.5.1. Задание 1.....	295
17.5.2. Задание 2.....	299
17.6. Задание	310
ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	311
Глава 18. Основы выборочного метода	313
18.1. Генеральная совокупность и выборка.....	313
18.2. Оценки и требования к ним.....	317
18.3. Оценка математического ожидания	325
18.4. Оценка дисперсии	326
18.5. Другие выборочные параметры.....	329
18.6. Методика текущих измерений	330
18.7. Вопросы для самопроверки.....	332
Глава 19. Доверительные оценки параметров распределения	334
19.1. Квантили	334
19.2. Доверительный интервал и доверительная вероятность	336
19.3. Абсолютная и практическая достоверность.....	341
19.4. Проверка статистических гипотез.....	342
19.5. Односторонние и двухсторонние критерии.....	344
19.6. Вопросы для самопроверки.....	347
Глава 20. Оценки генеральных параметров распределения	348
20.1. Оценка генерального математического ожидания.....	348
20.2. Оценка генеральной дисперсии	352
20.3. Оценка других генеральных параметров	356
20.4. Выявление промахов	358
20.5. Вопросы для самопроверки.....	360

Глава 21. Анализ закона распределения.....	361
21.1. Простейший критерий проверки основной гипотезы.....	361
21.2. Подбор теоретического распределения и его параметров.....	362
21.2.1. Вид теоретического распределения.....	362
21.2.2. Параметры теоретического распределения.....	370
21.3. Критерии согласия.....	374
21.3.1. Критерий согласия Колмогорова.....	375
21.3.2. Критерий согласия Пирсона.....	378
21.4. Вопросы для самопроверки.....	381
Глава 22. Сравнение выборок.....	382
22.1. Сравнение двух дисперсий.....	382
22.2. Сравнение двух средних.....	386
22.3. Сравнение нескольких дисперсий.....	390
22.3.1. Критерий Барглета.....	390
22.3.2. Критерий Кохрана.....	392
22.4. Сравнение нескольких средних.....	393
22.5. Вопросы для самопроверки.....	397
Глава 23. Дисперсионный анализ.....	399
23.1. 1-факторный дисперсионный анализ.....	402
23.2. 2-факторный дисперсионный анализ.....	405
23.3. Многофакторный дисперсионный анализ.....	410
23.4. Вопросы для самопроверки.....	411
Глава 24. Метод наименьших квадратов.....	412
24.1. МНК и его связь с ПМП.....	412
24.2. Система нормальных уравнений Гаусса.....	415
24.3. Доверительные интервалы для генеральных параметров аппроксимации.....	421
24.4. Аппроксимация степенными полиномами.....	424
24.5. Тригонометрическая аппроксимация.....	427
24.6. Аппроксимация функции нескольких переменных.....	431
24.6.1. Линейная модель для 2-факторного эксперимента.....	432
24.6.2. Полином для 2-факторного эксперимента.....	437
24.7. Нелинейная зависимость от параметров.....	437
24.8. Метод наименьших, но не квадратов.....	440
24.9. Вопросы для самопроверки.....	443
Глава 25. Корреляционный анализ.....	445
25.1. Понятие о корреляции.....	446
25.2. Оценка коэффициента корреляции по данным наблюдений.....	452
25.3. Вопросы для самопроверки.....	455
Глава 26. Генерация вариантов заданий.....	456
26.1. Обработка массива данных.....	456
26.2. Сравнение двух выборок.....	460
26.3. Сравнение нескольких выборок.....	461

26.4. Двухфакторный дисперсионный анализ.....	464
26.5. Аппроксимация степенными полиномами.....	466
26.6. Тригонометрическая аппроксимация.....	467
26.7. Линейная функция двух переменных	469
26.8. Кривая насыщения.....	470
26.9. Корреляционный анализ	471

Глава 27. Функции пакета Statistics Toolbox..... 474

27.1. Функции распределения.....	474
27.2. Плотности распределения	475
27.3. Квантили распределения	476
27.4. Генераторы случайных чисел.....	477
27.5. Статистические характеристики	477
27.6. Подбор параметров.....	478
27.7. Функции правдоподобия	479
27.8. Функции описательной статистики.....	479
27.9. Статистическая графика	480
27.10. Статистическое управление процессами.....	481
27.11. Линейные модели.....	481
27.12. Нелинейные модели.....	482
27.13. Планирование эксперимента.....	482
27.14. Кластерный анализ.....	483
27.15. Понижение размерности задач	483
27.16. Многомерный анализ данных.....	484
27.17. Анализ на основе дерева возможных решений.....	484
27.18. Проверка статистических гипотез.....	484
27.19. Проверка теоретического распределения.....	485
27.20. Функции непараметрической статистики.....	485
27.21. Демонстрационные примеры	485
27.22. Функции ввода-вывода	486
27.23. Вспомогательные функции.....	486

ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ ГРАФОВ..... 487

Глава 28. Графы и орграфы

28.1. Основные определения теории графов.....	490
28.2. Как задать граф.....	499
28.3. Описание процедуры <i>PlotGraph</i>	500
28.4. Пример обращения	509
28.5. Вопросы для самопроверки.....	510

Глава 29. Больше ребер, меньше вершин..... 511

29.1. Максимальное паросочетание.....	511
29.1.1. Основные определения.....	511
29.1.2. Сведение к задаче целочисленного линейного программирования	512
29.1.3. Описание процедуры <i>MaxMatch</i>	514
29.1.4. Пример обращения к процедуре <i>MaxMatch</i>	517

29.2. Минимальное вершинное покрытие.....	520
29.2.1. Основные определения и постановка задачи.....	520
29.2.2. Сведение к задаче ЦЛП.....	521
29.2.3. Описание процедуры <i>MinVerCover</i>	522
29.2.4. Пример обращения к процедуре <i>MinVerCover</i>	525
29.3. Немного о двойственности.....	527
29.4. Вопросы для самопроверки.....	528
Глава 30. Жадные алгоритмы и минимальные остовные деревья.....	530
30.1. Жадность помогает и губит.....	530
30.2. Остовное дерево минимального веса.....	532
30.3. Описание процедуры <i>MinSpanTree</i>	540
30.4. Пример обращения к процедуре <i>MinSpanTree</i>	542
30.5. Вопросы для самопроверки.....	545
Глава 31. Базис в пространстве циклов.....	546
31.1. Сколько нужно циклов?.....	546
31.2. Описание процедуры <i>CycleBasis</i>	550
31.3. Пример обращения к процедуре <i>CycleBasis</i>	553
31.4. Вопросы для самопроверки.....	558
Глава 32. Правильная раскраска вершин.....	559
32.1. Сколько нужно красок?.....	559
32.2. Правильная раскраска графа — задача ЦЛП.....	561
32.3. Описание процедуры <i>ColorGraph</i>	562
32.4. Пример обращения к процедуре <i>ColorGraph</i>	565
32.5. Вопросы для самопроверки.....	566
Глава 33. Кратчайший путь.....	567
33.1. Постановка задачи о кратчайшем пути.....	567
33.2. Алгоритм Дейкстры.....	568
33.3. Алгоритм Флойда — Уоршелла.....	570
33.4. Описание процедуры <i>ShortPath</i>	572
33.5. Пример обращения к процедуре <i>ShortPath</i>	574
33.6. Вопросы для самопроверки.....	575
Глава 34. Разбиваем и упорядочиваем.....	577
34.1. Бинарные отношения.....	577
34.2. Разбиение на классы эквивалентности.....	581
34.3. Алгоритмы упорядочения.....	583
34.4. Описание процедуры <i>DecompPartOrder</i>	584
34.5. Пример обращения к процедуре <i>DecompPartOrder</i>	586
34.6. Вопросы для самопроверки.....	590
Глава 35. Максимальный поток в сети.....	591
35.1. Задача о максимальном потоке как задача линейного программирования.....	591
35.2. Описание процедуры <i>MaxFlows</i>	593

35.3. Пример обращения к процедуре <i>MaxFlows</i>	595
35.4. Вопросы для самопроверки.....	597
Глава 36. Задача коммивояжера.....	598
36.1. Задача коммивояжера — задача ЦЛП	598
36.2. Описание процедуры <i>TravSale</i>	601
36.3. Пример обращения к процедуре <i>TravSale</i>	604
36.4. Вопросы для самопроверки.....	604
ПРИЛОЖЕНИЯ	607
Приложение 1. Учимся работать в MATLAB.....	609
П1.1. Символические вычисления	610
П1.2. Построение графиков	612
П1.3. Решение конечных уравнений.....	616
П1.4. Решение дифференциальных уравнений.....	619
П1.5. Вопросы для самопроверки.....	623
Приложение 2. Описание компакт-диска.....	625
Список литературы	627
Предметный указатель.....	631

Введение

Одно из направлений развития вычислительных технологий в настоящее время — это появление мощных математических пакетов, позволяющих максимально упростить процесс подготовки задачи, ее решения и анализа результатов. При использовании таких средств, как Maple, Mathcad, Mathematica или MATLAB, решение дифференциального или трансцендентного уравнения, аналитическое либо численное дифференцирование и интегрирование, обращение матрицы, решение проблемы собственных значений, вычисление предела, разложение в ряд и многие другие задачи решаются с помощью одной команды. Но, конечно, эту команду нужно правильно применить: надо корректно сформулировать задачу; знать, в каком виде искать решение и т. д. Иными словами, применение математических пакетов позволяет ускорить и упростить выполнение рутинных действий, выкладок и избавиться от появления досадных ошибок, но:

✓ Математические пакеты не избавляют от необходимости думать!

Среди нескольких десятков математических пакетов (четыре из них перечислены ранее) особого внимания заслуживает система инженерных и научных расчетов MATLAB [15, 16, 36]. В отличие от других пакетов, MATLAB в одинаковой мере ориентирован на применение как символических, так и численных методов. Включенное в MATLAB ядро Maple хорошо справляется с символическими вычислениями [58], а сам MATLAB и его многочисленные инструментарии, описанные, например, в [16, 53, 54, 57], прекрасно работают с числами.

Интересная особенность, реализованная разработчиками MATLAB, — это его способность встраиваться в другие приложения Windows и динамически обмениваться с ними данными. Так, автором этой книги предложен механизм интеграции системы MATLAB в Web-страницу [20], который позволяет пуб-

ликовать в сети Интернет интерактивные учебники с прямым доступом к MATLAB. В частности, именно по такой технологии создана и размещена в Интернете электронная версия данной книги, доступная по адресу [21]. На ней читатель может найти все программы из этой книги, запустить их на счет прямо со страницы и получить нужные ему результаты. Переработанная версия этого сайта размещена на диске, прилагаемом к книге.

Немаловажным фактором широкого распространения этого продукта является также ценовая политика компании MathWorks Inc. (производителя MATLAB), которая позволяет вузам приобретать MATLAB со значительными скидками. Это делает систему MATLAB, на наш взгляд, наиболее подходящей средой для обучения студентов методам решения математических задач.

Всеобщая компьютеризация коснулась и сферы образования. Сегодня уже немислимо представить изучение математики и различных ее спецкурсов без проведения лабораторных работ в компьютерном классе. Внедрение вычислительной техники в учебный процесс поставило на повестку дня задачу создания учебников по различным дисциплинам, ориентированных на применение компьютеров и, в частности, на использование математических пакетов. Например, широко распространенные учебники по вариационному исчислению [3, 7, 14, 28, 30, 41, 45, 48] были написаны в 70-е годы прошлого столетия или даже раньше. Несомненно, они остаются прекрасными в научном и методическом плане книгами. Но их авторы не предвидели и не могли предвидеть столь бурной компьютеризации. Поэтому необходима адаптация курса вариационного исчисления к использованию современных компьютерных технологий. Первые попытки в этом направлении — [19, 35]. *Часть I* этой книги, посвященная вариационному исчислению, написана на основе [19].

Несколько иная ситуация сложилась в математической статистике. Здесь также в классических учебниках, задачниках и пособиях [6, 8—11, 25, 31, 37, 38, 44, 47] мало затрагиваются проблемы использования вычислительной техники, хотя сама постановка задач математической статистики уже предполагает такое использование, и в каждом математическом пакете есть даже специальный инструментарий для решения задач статистики. В MATLAB это [57]. Многие его функции описаны в справочниках [16, 36] и на странице [42]. Из зарубежных изданий можно отметить [49, 50, 55]. Однако систематического изложения вузовского курса математической статистики с решением задач в среде MATLAB автору найти не удалось. Восполнить этот пробел призвана *часть II* книги, посвященная математической статистике. Ее основа — методическое пособие [23].

И уж совсем парадоксальная ситуация сложилась в теории графов. В классических учебниках [5, 18, 32, 43] реализации алгоритмов на ЭВМ уделяется

значительное внимание. Множество различных программ описано в [2]. Книга [33] посвящена анализу алгоритмов комбинаторной оптимизации, в том числе и теории графов. Однако создатели математических пакетов почему-то обошли эти задачи стороной. Только в Maple есть средства для решения задач теории графов [12]. Некоторые задачи дискретной математики решены с помощью MATLAB в [26]. Но отдельного инструментария MATLAB для решения задач теории графов до недавних пор не было. Лишь в конце 2003 года автором этой книги был разработан и размещен на сайте компании MathWorks Inc. набор функций (инструментарий) для решения задач на графах GrTheory Toolbox. Он доступен для свободного копирования по адресу [51], страница "Mathematics — General" ("Математика — общие вопросы"), и на момент написания этой книги (октябрь 2004 года) входит в десятку лидеров данной категории. Некоторые функции этого пакета описаны в [22]. В *части III* книги различные задачи теории графов решаются с помощью функций GrTheory Toolbox.

Структура и содержание книги

Настоящая книга написана на основе лекций, практических и лабораторных занятий по различным математическим курсам, которые автор на протяжении 20 лет преподает студентам Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". Она состоит из введения, трех частей, двух приложений и списка литературы. Во введении, которое вы сейчас читаете, дается краткий обзор содержания книги и список программного обеспечения, которое необходимо для полноценной работы с ней. Каждая из трех частей включает главы, посвященные соответственно вариационному исчислению, математической статистике и теории графов. В *приложении 1* рассмотрены некоторые приемы программирования в среде MATLAB. Если вы раньше не работали с этим пакетом, чтение книги целесообразно начать с него. В *приложении 2* описано содержимое компакт-диска, прилагаемого к книге.

Почти все главы книги построены примерно одинаково. Вначале излагается теория. Здесь читатель найдет готовый конспект лекций по данной теме. Далее (или в конце главы) следуют вопросы для самопроверки. Затем рассматривается решение примеров и составление программ. Решение везде доводится до численного результата, обычно с построением графика или рисунка. *Глава 26* посвящена генерации вариантов индивидуальных домашних заданий (ИДЗ), а для *части I* на диске, приложенном к книге, имеются по 30 вариантов ИДЗ по каждой теме. Содержание диска описано в *приложении 2*.

Для облегчения перекрестных ссылок все формулы, определения, теоремы, рисунки и т. п. имеют двойную нумерацию, включающую номер главы. Конец примера, определения или доказательства отмечен символом \square .

Необходимое программное обеспечение

Электронная версия, размещенная на диске, представляет переработанный вариант сайта автора [21], включая механизм взаимосвязи с MATLAB. Для ее чтения понадобится Internet Explorer версии 4.0 или выше. Другие браузеры, в частности Netscape Communicator, Bat! или Opera, не поддерживают в должной мере всевозможные динамические эффекты. Поэтому при написании электронного варианта этой книги был использован Internet Explorer и язык программирования VBScript. Как правило, при установке на компьютер системы Windows автоматически устанавливается и Internet Explorer.

В корневом каталоге диска-приложения находится главный файл книги index.html. Загрузив его, вы попадете в оглавление. Далее следуйте по обычным перекрестным ссылкам. Документ можно загрузить как непосредственно с компакт-диска, так и переписав предварительно все его содержимое на жесткий диск компьютера, сохраняя структуру папок. При этом никакой инсталляции не требуется: весь документ состоит только из Web-страниц, рисунков к ним, таблиц стилей и файлов сценариев.

В электронный вариант книги, размещенный на диске, встроен механизм взаимосвязи с MATLAB, описанный в [20]. Для правильной совместной работы с MATLAB нужно изменить некоторые настройки вашего обозревателя. Выполните следующие действия.

1. Войдите в меню **Сервис | Свойства обозревателя**.
2. Откройте страницу **Безопасность**.
3. Выберите зону **Интернет**.
4. Включите уровень безопасности **Другой**.
5. Найдите переключатель **Использование элементов ActiveX, не помеченных как безопасные** (это в конце страницы). Переключите флажок в положение **Предлагать**, как показано на рис. 1.
6. Нажмите кнопку **ОК**, чтобы принять изменение, и обновите загрузку страницы.

Теперь ваш обозреватель, загрузив страницу с диска или через Интернет, сможет подключить MATLAB, установленный на вашем локальном компьютере (если он, конечно, есть). Не забудьте при загрузке страницы ответить **Да** на вопрос: **Разрешить ли загрузку ActiveX-элементов, не помеченных как безопасные?**

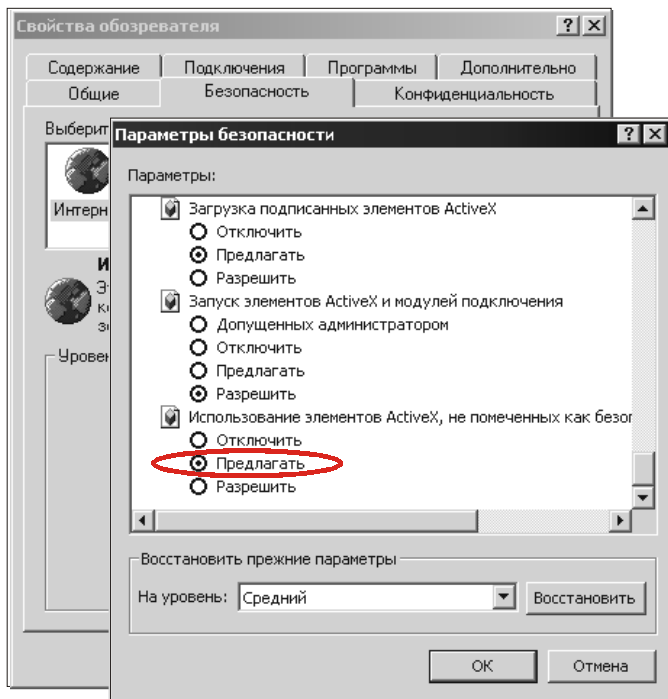


Рис 1. Настройка обозревателя на совместную работу с MATLAB

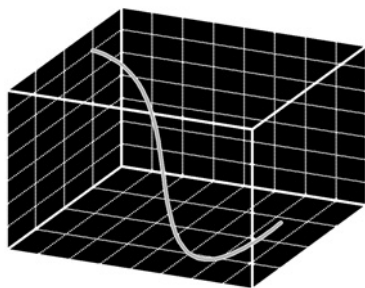
Далее, на вашем компьютере должен быть установлен MATLAB версии 5, 6 или 7. Если у вас его нет, то вы сможете только читать электронную версию книги в интерактивном режиме, но не сможете считать свои варианты задач. Для полноценной работы с книгой установите MATLAB. Полная его версия занимает диск или два и требует для своей установки более 800 Мбайт. Но если отказаться от некоторых инструментариев (в MATLAB они называются *Toolboxes*), то можно значительно сократить объем дискового пространства. При решении задач из этой книги нам понадобятся следующие инструментарии:

- Symbolic Toolbox** (инструментарий для символьных вычислений);
- Partial Differential Equations Toolbox**, или сокращенно **PDE Toolbox** (инструментарий для дифференциальных уравнений в частных производных);
- Optimization Toolbox** (инструментарий для оптимизации);
- Statistics Toolbox** (инструментарий для статистики).

Их устанавливайте обязательно. Для экономии места можно также ограничиться одной из двух справочных служб: или в формате HTML, или в форма-

те PDF. Первая доступна для просмотра через тот же Internet Explorer, а вторая — через Acrobat Reader. Они полностью дублируют друг друга.

К сожалению, в некоторых вариантах 6-й версии MATLAB есть проблемы с кодировкой символов кириллицы. Так, буква я (ASCII-код 255, т. е. все единицы в двоичной системе), видимо, используется разработчиками MATLAB в своих, служебных целях, т. к. она не воспринимается даже в комментариях. Поэтому, если у вас установлена такая версия, замените везде в областях ввода маленькую букву я на большую Я.

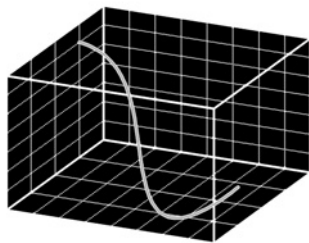


ЧАСТЬ I

Вариационное исчисление

- Глава 1. Введение в вариационное исчисление
- Глава 2. Элементарная задача вариационного исчисления
- Глава 3. Функционалы, зависящие от нескольких функций
- Глава 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков
- Глава 5. Функционалы, зависящие от функции нескольких переменных
- Глава 6. Вариационная задача в параметрической форме
- Глава 7. Естественные граничные условия
- Глава 8. Условия трансверсальности
- Глава 9. Отражение экстремалей
- Глава 10. Преломление экстремалей
- Глава 11. Экстремали с угловыми точками
- Глава 12. Односторонние вариации
- Глава 13. Достаточные условия экстремума
- Глава 14. Условный экстремум функционалов
- Глава 15. Метод начальных параметров
- Глава 16. Метод конечных разностей (МКР)
- Глава 17. Метод Ритца

ГЛАВА 1



Введение в вариационное исчисление

1.1. Основная задача вариационного исчисления

При рассмотрении новых объектов их стараются связать с уже знакомыми. И мы при изучении курса вариационного исчисления будем опираться на известные нам определения математического анализа.

До сих пор в обычном курсе анализа вы имели дело с *функциями*. В вариационном исчислении мы встретимся с новым видом математических объектов — *функционалами*. Чем же отличаются функционалы от функций? Давайте вспомним известное вам определение функции.

Определение 1.1. *Функцией* называется любое правило, по которому заданному числу x из некоторого их множества ставится в соответствие число y . \square

Мы обозначаем функцию так:

$$y = y(x). \quad (1.1)$$

Множество чисел x , для которых определена функция y , называется *областью определения функции*. Обычно область определения функции — это интервал или система интервалов (открытых, полуоткрытых, закрытых), или вся числовая ось. Хотя, в общем случае, это не обязательно.

Если числу α ставится в соответствие *функция*, то α тоже является функцией, но уже зависящей от параметра:

$$y = y(x, \alpha). \quad (1.2)$$

Ее можно рассматривать как функцию двух аргументов.

А вот если *функции* ставится в соответствие *число*, то это будет функционал.

Определение 1.2. *Функционалом* называется любое правило, по которому заданной функции $y(x)$ из некоторого их множества ставится в соответствие число J . \square

Обозначим функционал так:

$$J = J(y(x)). \quad (1.3)$$

Множество функций $y(x)$, на которых определен функционал J , назовем *классом функций*.

В (1.3) записан простейший случай зависимости. В общем случае функционал J может зависеть не от одной, а от нескольких функций, причем функции могут быть нескольких переменных. Функционал J может зависеть также от производных этих функций.

Функционал (1.3) можно рассматривать как функцию очень большого (в пределе — бесконечного) числа переменных — значений функции $y(x)$ в различных точках $x \in [a, b]$, как показано на рис. 1.1.

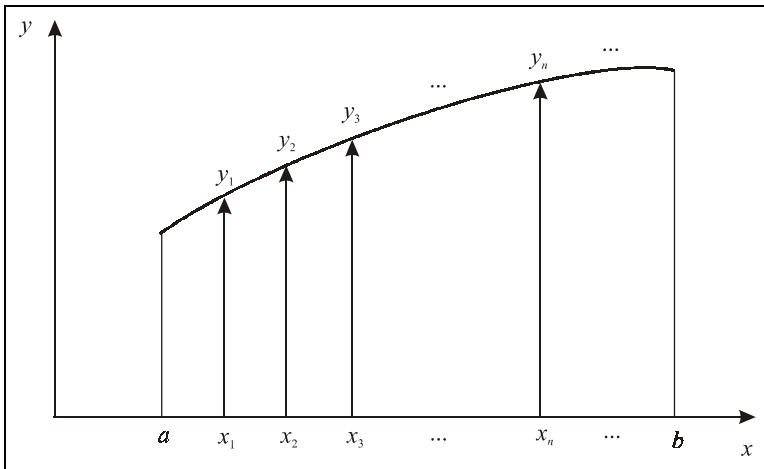


Рис. 1.1. Функционал — это предел функции многих переменных

Вместо $J(y(x))$, как было в (1.3), мы здесь записываем:

$$J = J(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots). \quad (1.4)$$

Конечно, такая аналогия весьма условна. В обычной функции многих переменных значения, например, аргументов y_2 и y_3 могут сильно отличаться друг от друга (если это допускается областью определения функции). В функционале ситуация принципиально иная. Например, если функция $y(x)$ — непрерывная, то значения соседних аргументов не могут сильно

отличаться. Если $y(x)$ — дифференцируемая, то, к примеру, в точке y_2 не может быть излома, и т. д. Но с другой стороны, эта аналогия полезна, т. к. она используется в численных методах (см. главу 16).

ПРИМЕР 1.1. Длина линии, соединяющей точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, — это функционал:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1.5)$$

Здесь классом функций, на котором определен наш функционал, является множество дифференцируемых на $[x_1, x_2]$ функций, проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Дифференцируемых — потому что нам нужно вычислять производную от функций $y(x)$; проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — потому что так задано в условии задачи. \square

Определение 1.3. Основной задачей вариационного исчисления является исследование на экстремум функционалов, т. е. нахождение таких функций (из данного класса), которые доставляют функционалу наибольшее или наименьшее значение. Такие функции называются *экстремальями*. \square

Так, в примере 1.1 экстремалью является прямая, соединяющая точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$: эта функция доставляет минимум функционалу (1.5) на соответствующем классе.

1.2. Классические задачи и принципы вариационного исчисления

Задачи, связанные с исследованием функционалов на экстремум, интересовали человечество давно. Из глубокой древности до нас дошли *четыре классические задачи вариационного исчисления*. Это задача Дидоны, задача о брахистохроне, задача о якорной цепи и задача о геодезических линиях.

Задача Дидоны. По одному из мифов, Дидона (рис. 1.2) была сестрой финикийского царя Пигмалиона, который убил ее мужа, чтобы воспользоваться его богатством. Она покинула Финикию и поселилась в Северной Африке, где царь Иарб обещал дать ей столько земли, сколько покроет воловья шкура. Дидона разрежала шкуру на тонкие ремни и отмерила ими участок, на котором основала город Карфаген (рис. 1.3). А задача, которую решила Дидона, стала классической задачей вариационного исчисления: линией заданной длины L , соединяющей точки $O(0, 0)$ и $M_2(x_2, 0)$, требуется охватить максимальную площадь S , расположенную под линией и выше оси Ox (рис. 1.4). Здесь мы выбрали систему координат так, чтобы ее начало совпало с одним



Рис. 1.2. Дидона

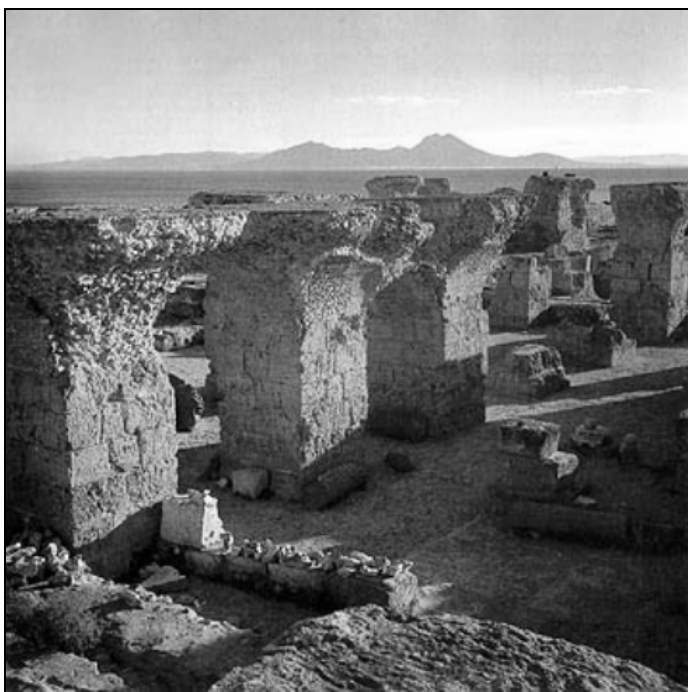


Рис. 1.3. Развалины Карфагена (Тунис)

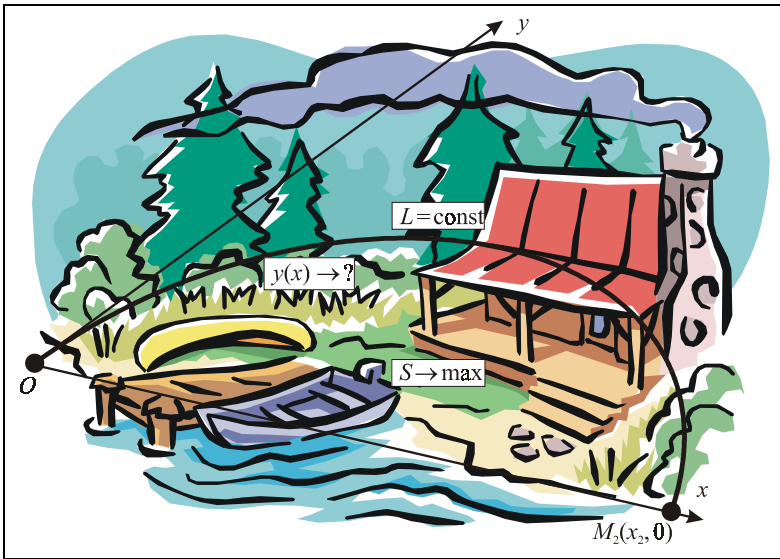


Рис. 1.4. Задача Дидоны

из концов линии, ось Ox направили вдоль береговой линии, а ось Oy — перпендикулярно ей вглубь суши. \square

Если правый конец x_2 неподвижен, то решением задачи Дидоны будет *сегмент круга*, а если может скользить вдоль оси Ox — то *полукруг*. Эта задача относится к классу *изопериметрических* (линия имеет постоянный периметр, т. е. длину). Мы будем решать ее в *главе 14*.

Оценим, какую площадь имел Карфаген в момент его основания. Волчья шкура имеет площадь $S_{\text{ш}} \approx 2 \text{ м}^2$. С помощью примитивных инструментов ее можно разрезать на полоски шириной $h \approx 5 \text{ мм}$. Длина полученной веревки $l = S_{\text{ш}}/h \approx 400 \text{ м}$. Этой веревкой можно охватить полукруг радиуса $R = l/\pi \approx 127,3 \text{ м}$. Площадь такого полукруга $S_{\text{г}} = \pi R^2/2 \approx 25\,465 \text{ м}^2$. Два с половиной гектара — не очень-то и много.

Обобщением этой задачи является *взвешенная задача Дидоны*. Здесь разные участки земли имеют разную стоимость:

$$c = c(x, y), \quad (1.6)$$

и требуется максимизировать не площадь $S(y(x))$, а суммарную стоимость земельного участка:

$$C(y(x)) = \int_0^{x_2} \left(\int_0^{y(x)} c(x, y) dy \right) dx \rightarrow \max. \quad (1.7)$$

Решение этой задачи — уже не обязательно дуга окружности. Если, например, прибрежные участки более ценные, чем расположенные вдали от берега, то граница города растянется вдоль береговой линии, как показано на рис. 1.5.



Рис. 1.5. Взвешенная задача Дидоны

Задача о брахистохроне. *Брахистохрона* (от греч. βραχιστοσ — кратчайший и χρονος — время) в узком смысле слова — это кривая наискорейшего спуска, т. е. та из всевозможных кривых, соединяющих две точки O и M_2 , вдоль которой материальная точка, катящаяся без трения из точки O под действием силы тяжести, в кратчайшее время достигнет точки M_2 (рис. 1.6).

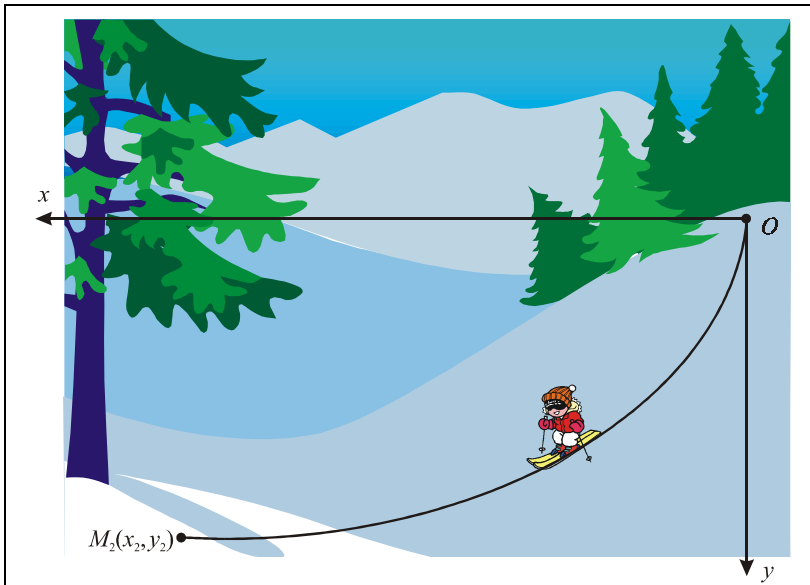


Рис. 1.6. Задача о брахистохроне

Начало системы координат на рисунке мы поместили в точку старта, ось Ox направили горизонтально вдоль траектории движения (она считается плоской), а ось Oy — вертикально вниз. \square

Если вы заранее не знаете, то вряд ли догадаетесь, что решением этой задачи является *циклоида*. Да, да, та самая циклоида — след точки на ободе колеса, которое катится без трения по оси Ox . Мы решим эту задачу в *главе 2*.

Брахистохрона в широком смысле слова — это также линия наискорейшего прохождения дистанции, но уже не обязательно в поле силы тяжести. Например, согласно *принципу Ферма* (Pierre Fermat, 1601—1665, рис. 1.7), свет, распространяясь в среде с переменной оптической плотностью (показателем преломления) $n(x, y)$, движется именно по брахистохроне. Он стремится прийти из точки $M_1(x_1, y_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2)$ за минимально возможное время. И линией, по которой он распространяется, уже будет не обязательно прямая (рис. 1.8). Чтобы минимизировать время прохождения дистанции, большую часть своего пути свет стремится пройти в среде с меньшей оптической плотностью (его скорость там выше). \square



Рис. 1.7. П. Ферма



Рис. 1.8. Распространение света (принцип Ферма)

Задача о якорной цепи. Найти форму провисания якорной цепи. Или, что то же самое, найти форму провисания тонкой абсолютно гибкой нерастяжимой нити, соединяющей точки M_1 и M_2 (рис. 1.9). \square

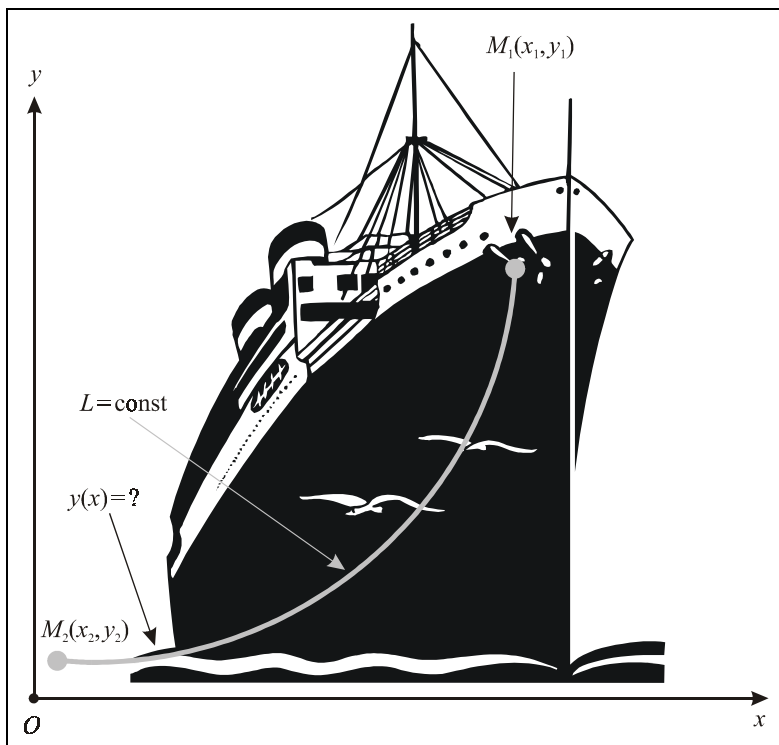


Рис. 1.9. Задача о якорной цепи

Решением этой задачи является гиперболический косинус, который иногда так и называют: цепная линия.

Как и задача Дидоны, эта задача является изопериметрической, и мы решим ее в *главе 14*.

Конечно, у этой задачи также есть обобщения: линия может быть переменной плотности, иметь конечную гибкость, быть растяжимой и т. д.

Задача о геодезической линии. На заданной поверхности требуется найти линию минимальной длины, которая соединяет две заданные точки поверхности M_1 и M_2 (рис. 1.10). \square

Решение этой задачи зависит от вида поверхности. В *главе 14* мы рассмотрим пример решения для одной конкретной поверхности.

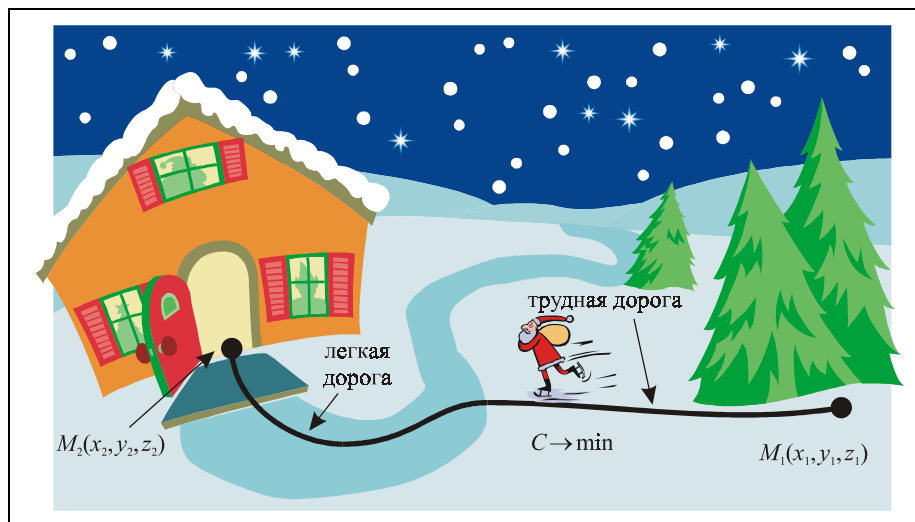


Рис. 1.10. Задача о взвешенной геодезической линии

Обобщение этой задачи — нахождение взвешенной геодезической линии, когда на поверхности распределена некоторая весовая функция c , и требуется минимизировать общий вес пути.

На рис. 1.10 показана как раз такая ситуация: по дорожке нашему Деду Морозу бежать легко, а по снегу — трудно. Поэтому он интуитивно выбирает более длинный, но быстрый путь: сначала как можно скорее стремится выйти на дорожку, а потом движется по ней. Хорошей иллюстрацией к задаче о геодезической линии является пословица "Умный в гору не пойдет, умный гору обойдет".

Если проанализировать эти классические задачи, то видно, что их можно разбить на две группы. В одних задачах мы сами пытаемся улучшить решение: максимизировать площадь, минимизировать путь и т. д. Типичные примеры — это задача Дидоны и задача о геодезической линии. Другие задачи являются следствием некоторых основополагающих принципов (законов природы). Так, распространение света по брахистохроне является следствием принципа Ферма, форма провисания якорной цепи — это следствие известного закона механики: любое тело стремится занять положение устойчивого равновесия, когда его энергия минимальна.

Подобные законы, сформулированные как задачи вариационного исчисления, носят название *вариационных принципов*. С одним из них мы уже познакомились — это принцип Ферма. Другой важный вариационный принцип, который часто применяется в механике, — это *принцип Остроградского* — Га-



Рис. 1.11. М. В. Остроградский



Рис. 1.12. У. Р. Гамильтон

милтона (Михаил Васильевич Остроградский, 1801—1862, рис. 1.11, и Уильям Роуэн Гамильтон (William Rowan Hamilton), 1805—1865, рис. 1.12).

Принцип Остроградского — Гамильтона. Среди всех возможных (т. е. совместимых со связями) движений системы материальных точек в действительности осуществляется такое, которое доставляет стационарное значение функционалу S . Он называется "действие по Остроградскому — Гамильтону" и вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt, \quad (1.8)$$

где T — кинетическая энергия системы, U — ее потенциальная энергия, t — время, $[t_1, t_2]$ — интервал времени, на котором рассматривается движение системы. \square

Таким образом, законы движения механических систем могут быть получены как следствие вариационного принципа Остроградского — Гамильтона. В следующих главах мы научимся выводить эти законы.

1.3. Классы функций

Давайте вспомним, как мы определяли экстремум функции нескольких переменных

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) = y(\mathbf{x}). \quad (1.9)$$

Здесь вектор аргументов обозначен \mathbf{x} .

Определение 1.4. Точка x_0 называется точкой *минимума* функции $y(x)$, если эту точку x_0 можно окружить некоторой малой δ -окрестностью, в которой $\forall x$ выполняется условие: $y(x) \geq y(x_0)$. Если при этом $\forall x$ из этой δ -окрестности, кроме x_0 , будет выполняться $y(x) > y(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 достигается *строгий минимум*. Аналогично дается определение *максимума* (*строгого максимума*). \square

Хотелось бы таким же образом определить экстремум и для функционалов, но что такое δ -окрестность *функции*? Для точки $x \in R_n$ мы под δ -окрестностью точки x_0 понимаем n -мерный круг радиуса δ с центром в точке x_0 .

Определение 1.5. δ -окрестность точки x_0 — это множество точек x , для которых выполняется условие:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2} < \delta. \quad \square \quad (1.10)$$

Здесь x_i — координаты точки x , а x_{0i} — координаты x_0 . Для $n=2$ малая δ -окрестность точки x_0 показана на рис. 1.13.

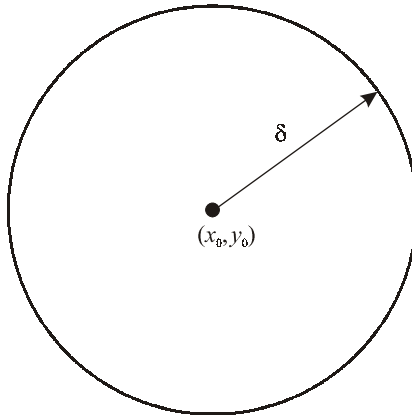


Рис. 1.13. δ -окрестность точки x_0 в смысле (1.10)

Правильнее было бы сказать так: мы вначале определили для точки $x \in R_n$ *норму*, как квадратный корень из суммы квадратов ее координат, потом ввели понятие *расстояния* (норма разности), а затем уже определили δ -окрестность точки x_0 как такое множество точек, для которых их расстояние до x_0 меньше δ . Попробуем пойти по этому же пути для функций. Более подробно эти вопросы рассматриваются в курсе *функционального анализа*. Здесь мы ограничимся только теми понятиями, которые будут нам нужны для решения задач вариационного исчисления.

Функцию $f(x)$ на $[a, b]$ можно рассматривать как ∞ -мерный вектор (см. рис. 1.1): координатные оси — это значения $x \in [a, b]$, а сами значения координат — это значения функции $f(x)$. Вместо суммы, участвующей в определении 1.5, мы можем записать, например, интеграл. Тем самым мы определим некоторый класс функций.

Определение 1.6. Классом функций L_2 на $[a, b]$ называется множество функций, интегрируемых в квадрате на $[a, b]$, для которых норма вычисляется по формуле

$$\|f(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx} . \quad \square \quad (1.11)$$

Если возможны различные толкования, название класса проставляют в виде индекса внизу после определения нормы. Саму норму обозначают не одинарными вертикальными черточками, как модуль, а двойными. В определении 1.6 требуется, чтобы функция была интегрируемой в квадрате на $[a, b]$, т. к. там вычисляется такой интеграл.

Используя определение 1.6, можно ввести понятие δ -окрестности функции $y_0(x)$ в классе L_2 . Это такие функции $y(x)$, для которых норма разности их от $y_0(x)$ меньше δ :

$$\|y(x) - y_0(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (y(x) - y_0(x))^2 dx} < \delta. \quad (1.12)$$

ПРИМЕР 1.2. Посмотрите на рис. 1.14. Здесь сплошной жирной линией нарисована исходная функция $y_0(x)$, а еще две функции нарисованы так: сплошной тонкой линией — $y_1(x)$, а штриховой — $y_2(x)$.

Функция $y_2(x)$ отличается от $y_0(x)$ значительно, но только на небольшом интервале. Наоборот, $y_1(x)$ отличается от $y_0(x)$ хоть и не так сильно, но на всем отрезке $[a, b]$. Площадь между $y_1(x)$ и $y_0(x)$ больше площади между $y_2(x)$ и $y_0(x)$. Поэтому, если вычислять по (1.12) расстояние (норму разности) между $y_1(x)$ и $y_0(x)$, с одной стороны, и $y_2(x)$ и $y_0(x)$ с другой, то окажется, что

$$\|y_1(x) - y_0(x)\|_{L_2} > \|y_2(x) - y_0(x)\|_{L_2} . \quad \square \quad (1.13)$$

С классом функций L_2 вы имели дело в теории рядов Фурье. Там, в частности, доказывается, что из всех тригонометрических многочленов степени n наилучшее приближение к функции $y(x)$ в смысле (1.12) имеет такой многочлен, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами Фурье функции $y(x)$. На этом далее строится доказательство сходимости рядов Фурье.