В. А. Зорич

Математический анализ задач естествознания

УДК 517
ББК 22.16
386

Зорич В. А.
Математический анализ задач естествознания.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
155 с.
ISBN 978-5-4439-3225-5

Эта книга содержит записи годового экспериментального спецкурса естественнонаучного содержания. В нём представлены три темы:

— анализ размерностей физических величин с примерами приложений, включая модель турбулентности по Колмогорову;

— функции очень многих переменных и явление концентрации: нелинейный закон больших чисел, геометрический смысл распределений Гаусса и Максвелла, теорема Котельникова—Шеннона;

— классическая термодинамика и контактная геометрия: два начала термодинамики на языке форм, распределения и теорема Фробениуса, метрика Карно—Каратеодори.

Спецкурс предназначен в первую очередь математикам, но может быть также полезен студентам и специалистам иных специальностей.

В приложении помещена общедоступная статья автора «Математика как язык и метод».

Подготовлено на основе книги:
Зорич В. А. Математический анализ задач естествознания. — Новое изд., доп. — М.: МЦНМО, 2017. — 160 с. — ISBN 978-5-4439-1225-7

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-3225-5

Оглавление

Тема II
Многомерная геометрия и функции очень многих переменных

Глава I

Элементы теории

§1. Размерность физической величины (начальные представления)

1.1. Измерение, единица измерения, процесс измерения

Все перечисленные понятия фундаментальны и подвергались анализу лучшими представителями науки, физики и математики в первую очередь. Такой анализ приводит к анализу понятий пространства, твёрдого тела, движения, времени, причинности и т. п.

Мы здесь не собираемся погружаться так глубоко. Отметим, однако, что каждая теория хорошо моделирует некоторую сферу явлений только в каких-то масштабах. В каких именно, мы, к сожалению, порой узнаём только тогда, когда теория перестаёт согласовываться с действительностью. Именно в эти моменты мы обычно вновь возвращаемся к фундаменту теории, подвергая его тщательному анализу и должной реконструкции.

А сейчас давайте начнём с накопления доступного нам полезного конкретного материала.

1.2. Основные и производные единицы

В быту мы постоянно пользуемся какими-то единицами измерения длины, массы, времени, силы, скорости, энергии, мощности... Какие-то из них мы выделяем как основные, а какие-то при этом уже оказываются производными.

Примеры основных единиц:

L — единица длины *метр* (м или m);
M — единица массы *килограмм* (кг или kg);
T — единица времени *секунда* (с или s).

Примеры производных единиц:

v — скорость (м/с или m/s) $[v] = LT^{-1}$;
V — объём (м^3 или m^3) $[V] = L^3$;

a — ускорение (м/с^2 или m/s^2) $[a]=LT^{-2}$;
l — световой год $[l]=[cT]=L$;
F — сила, $F=ma$, $[F]=[ma]=MLT^{-2}$.

Намечается общее наблюдение о формуле $L^{d_1}M^{d_2}T^{d_3}$ размерности механической физической величины; $\{d_1, d_2, d_3\}$ — вектор размерности в базисе $\{L, M, T\}$.

Разовьём эту векторную алгебро-геометрическую аналогию.

1.3. Зависимые и независимые единицы

Пример. Единицы величин v, a, F независимы и тоже могут быть приняты за основные, так как

$$[L] = v^2a^{-1}, \quad [M] = Fa^{-1}, \quad [T] = va^{-1}.$$

Намечается аналогия с векторным пространством, его базисом и системами независимых векторов. (Более глубокий смысл этой аналогии откроется ниже.)

§ 2. Формула размерности физической величины

2.1. Изменение числовых значений физической величины при изменении размеров основных единиц

Пример. Если расстояния измерять в километрах (т. е. вместо одного метра за единицу измерения длин принять в 1000 раз большую единицу, 1 км), то одна и та же физическая длина будет иметь разные численные значения по отношению к этим двум единицам длины, а именно: 1 км$=10^3$ м, L км$=10^3L$ м, 1 м$=10^{-3}$ км, L м$=10^{-3}L$ км. Таким образом, изменение единицы длины в α раз приводит к изменению числового значения L м всех измеряемых длин в α^{-1} раз, т. е. значение L заменится на $\alpha^{-1}L$.

Это же относится и к возможному изменению единиц массы и времени (тонна, грамм, миллиграмм; час, сутки, год, миллисекунда...).

Значит, если физическая величина в базисе $\{L, M, T\}$ имеет размерность $L^{d_1}M^{d_2}T^{d_3}$, т. е. $\{d_1, d_2, d_3\}$ — её вектор размерности, то изменение единиц измерения длины, массы и времени в $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ раз соответственно, по-видимому, должно приводить к изменению числового значения этой величины в $\alpha_1^{-d_1}\alpha_2^{-d_2}\alpha_3^{-d_3}$ раз.

2.2. Постулат инвариантности отношения значений одноимённых физических величин

Пример. Площадь треугольника есть функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ длин трёх его сторон. Возьмём другой треугольник и подсчитаем его площадь $\widetilde{y} = f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$.

При изменении размера единицы длины числовые значения y и $\widetilde{y}$ изменятся. Однако их отношение $\widetilde{y}/y$ при этом останется неизменным.

Пусть теперь имеется две однотипные физические величины, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\widetilde{y} = f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_m)$, зависящие не от трёх, а от любого конечного набора только длин, или масс, или времён...

В теории размерностей принимается следующий основной постулат.

Постулат абсолютности отношений:

$$\frac{\widetilde{y}}{y} = \frac{f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_m)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{f(\alpha\widetilde{x}_1, \alpha\widetilde{x}_2, \ldots, \alpha\widetilde{x}_m)}{f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m)}. \tag{1}$$

Иными словами, постулируется, что при изменении масштаба основной единицы (длины, массы, времени...) однотипные физические величины $y, \widetilde{y}$ (все площади, все объёмы, все скорости, все силы...) меняют своё числовое значение в одно и то же число раз (своё для каждого типа величин).

2.3. Функция размерности и формула размерности физической величины в данном базисе

Равенство (1) показывает, что отношение

$$\frac{f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)} =: \varphi(\alpha)$$

зависит только от α. Это позволяет указать вид функции $\varphi(\alpha)$.

Заметим сначала, что

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big). \tag{2}$$

Действительно,

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \frac{f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \ldots, \alpha_1 x_m)}{f(\alpha_2 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_2 x_m)} = \frac{f\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_2, \ldots, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x_m\Big)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \varphi\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big).$$

Здесь крайние равенства непосредственно следуют из определения функции φ; а учитывая независимость φ от переменных

$(x_1, x_2, \dots, x_m)$, можно перейти к переменным $\alpha_2{}^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и получить среднее равенство.

Считая, что φ — регулярная функция, продифференцируем соотношение (2) по α_1, и, положив затем $\alpha_1 = \alpha_2$, придём к уравнению

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \varphi'(1).$$

Поскольку $\varphi(1) = 1$, решение этого уравнения при таком условии имеет вид

$$\varphi(\alpha) = \alpha^d.$$

Итак, найденный вид функции φ является следствием принятого постулата теории размерностей физических величин. В формулировке постулата мы для простоты начальных рассмотрений считали, что все переменные $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ имеют одинаковый характер (длины, или массы, или времени, или скорости...). Но ясно, что любую функциональную зависимость физической величины от набора физических переменных можно представить в виде

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, y_1, y_2, \dots, y_{m_2}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k}),$$

где однотипные физические переменные собраны в группы и обозначены общим символом (мы не хотели вводить нумерацию групп).

Это означает, что

$$\frac{f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \dots, \alpha_1 x_{m_1}, \dots, \alpha_k z_1, \alpha_k z_2, \dots, \alpha_k z_{m_k})}{f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k})} = \alpha_1{}^{d_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k{}^{d_k},$$

если переменные разных групп допускают независимое изменение масштабов. В таком случае в рамках действия постулата мы нашли закон

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \dots, \alpha_1 x_{m_1}, \dots, \alpha_k z_1, \alpha_k z_2, \dots, \alpha_k z_{m_k}) = \\ = \alpha_1{}^{d_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k{}^{d_k} f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k}) \quad (3)$$

изменения численного значения физической величины

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k})$$

при изменении масштабов единиц физически независимых переменных.

Набор $(d_1, \dots, d_k)$ называют *вектором размерности* или просто *размерностью* величины y по отношению к выделенным независимым физическим единицам измерения.

Функцию $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = {\alpha_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {\alpha_k}^{d_k}$ называют *функцией размерности*.

Символом $[y]$ в зависимости от контекста обозначают либо вектор размерности, либо функцию размерности.

Физическую величину называют *безразмерной*, если её вектор размерности нулевой.

Например, если $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = {\alpha_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {\alpha_k}^{d_k}$ — функция размерности физической величины y по отношению к независимым физическим величинам $\{x_1, \ldots, x_k\}$, то отношение

$$\Pi := \frac{y}{{x_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {x_k}^{d_k}}$$

является безразмерной величиной относительно $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

§3. Основная теорема теории размерностей

3.1. П-теорема[1]

Теперь рассмотрим общий случай зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \tag{4}$$

физической величины y от переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых только первые k являются физически (размерно) независимыми в смысле обсуждаемой нами теории размерностей физических величин.

Приняв $x_1, x_2, \ldots, x_k$ за единицы измерения соответствующих величин, т. е. меняя масштаб, полагая $\alpha_1 = {x_1}^{-1}, \ldots, \alpha_k = {x_k}^{-1}$, мы из равенства (3) получим соотношение

$$\Pi = f(1, \ldots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}) \tag{5}$$

между безразмерными величинами

$$\Pi = \frac{y}{{x_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {x_k}^{d_k}}, \quad \Pi_i = \frac{x_{k+i}}{{x_1}^{d_{i_1}} \cdot \ldots \cdot {x_k}^{d_{i_k}}}, \quad \text{где } i = 1, \ldots, n-k.$$

[1]Её также называют теоремой Бакингема, связывая её появление с работами: *Buckingham E.* On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations // Phys. Rev. 1914. Vol. 4. P. 345—376; и *Buckingham E.* The principle of similitude // Nature 1915. Vol. 96. P. 396—397.

В неявной форме П-теорема и принцип подобия содержатся также в работе: *Jeans J. H.* Proc. Roy. Soc. 1905. Vol. 76. P. 545, не говоря о том, что законами подобия по существу владели уже Ньютон и Галилей. Историю вопроса можно найти в работе [5] вместе со ссылкой на работу [6], где уже есть всё, кроме названия П-*теорема*. В этой связи укажем ещё на любопытные публикации [7] и [8].

Равенство (5) можно переписать в виде

$$y = {x_1}^{d_1} \cdot \ldots \cdot {x_k}^{d_k} \cdot f(1, \ldots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}). \tag{6}$$

Итак, пользуясь масштабной однородностью зависимостей между физическими величинами, выраженной в сформулированном выше постулате, мы можем перейти от соотношения (4) к соотношению (5) между безразмерными величинами, уменьшив при этом число переменных; или мы можем перейти к равносильному (5) соотношению (6), выделив явно всю размерную составляющую величины y по отношению к максимальной системе $x_1, x_2, \ldots, x_k$ размерно независимых переменных.

Возможность такого перехода от общего соотношения (4) к более простым соотношениям (5) или (6) и составляет содержание так называемой П-*теоремы* — основной теоремы теории размерностей физических величин, которую мы сейчас доказали.

3.2. Принцип подобия

Содержание, смысл, возможности П-теоремы и подводные камни, связанные с ней, будут раскрываться ниже по мере рассмотрения конкретных примеров её использования.

Но одна идея весьма эффективного (и эффектного) приложения доказанной теоремы лежит прямо на поверхности и очевидна: не ломая самолёты, корабли и прочие объекты, многие эксперименты можно проводить в лаборатории над моделями, пересчитывая затем с помощью П-теоремы результаты (например, экспериментально найденную безразмерную зависимость (5)) к конкретным натуральным размерам объектов (по формуле (6)).

Глава II

Примеры приложений

Рассмотрим теперь некоторые примеры, на которых прояснятся различные стороны доказанной П-теоремы.

§1. Период обращения тела на круговой орбите (законы подобия)

Тело массы m удерживается на круговой орбите радиуса r центральной силой F. Надо найти период обращения

$$P = f(r, m, F).$$

Здесь и далее фиксируем стандартный для механики базис основных физических единиц (длина, масса, время), которые, следуя Максвеллу, мы будем обозначать $\{L, M, T\}$. (В термодинамике символ T используется для обозначения абсолютной температуры, но, если не оговорено иное, мы пока используем это обозначение для единиц времени.)

Найдём векторы размерности величин P, r, m, F в базисе $\{L, M, T\}$. Запишем их столбцами следующей таблицы:

	P	r	m	F
L	0	1	0	1
M	0	0	1	1
T	1	0	0	−2

Поскольку функция размерности, как мы показали, всегда имеет степенной вид, перемножению таких функций отвечает сложение соответствующих показателей степени, т. е. в итоге отвечают линейные операции над векторами размерности соответствующих физических величин.

Значит, используя стандартную линейную алгебру, можно находить системы независимых величин по матрице, образованной их векторами размерности, а также, раскладывая вектор размерности какой-то величины по векторам размерности выбранных независимых величин, находить формулу размерности этой величины в системе независимых величин конкретной задачи.

Так, в нашем случае величины r, m, F независимы, ибо матрица, образованная их векторами размерности $[r]$, $[m]$, $[F]$, невырожденна. Найдя разложение $[P]=\frac{1}{2}[r]+\frac{1}{2}[m]-\frac{1}{2}[F]$, на основании формулы (6) главы I можно сразу написать, что

$$P=\left(\frac{mr}{F}\right)^{1/2}\cdot f(1,1,1).$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя $c = f(1,1,1)$ (который можно найти в единичном лабораторном эксперименте), мы нашли зависимость P от r, m, F.

Конечно, зная закон Ньютона $F=m\cdot a$, в данном случае легко можно было бы найти и окончательную формулу, где $c=2\pi$.

Однако всё, что мы использовали, — это лишь общее указание о существовании зависимости $P=f(r,m,F)$.

§ 2. Гравитационная постоянная. Третий закон Кеплера и показатель степени в законе всемирного тяготения Ньютона

Вслед за Ньютоном найдём показатель степени α в законе всемирного тяготения

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^\alpha}.$$

Используем предыдущую задачу и известный Ньютону третий закон Кеплера, который применительно к круговым орбитам означает, что квадраты периодов обращения планет (относительно центрального тела массы M) относятся как кубы радиусов их орбит. В силу результата предыдущей задачи и закона всемирного тяготения с пока ещё не найденным показателем α имеем

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2=\left(\frac{m_1r_1}{F_1}\right)\Big/\left(\frac{m_2r_2}{F_2}\right)=\left(\frac{m_1r_1}{m_1\frac{M}{r_1^\alpha}}\right)\Bigg/\left(\frac{m_2r_2}{m_2\frac{M}{r_2^\alpha}}\right)=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha+1}.$$

Но по закону Кеплера $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$.

Значит, $\alpha=2$.

§3. Период колебаний тяжёлого маятника (включение g)

После сделанных при решении первой задачи подробных разъяснений мы можем теперь позволить себе более компактное изложение, с остановками только на каких-то новых обстоятельствах.

Найдём период колебаний маятника. Точнее: груз массы m, закреплённый на конце невесомого подвеса длины l, отклоняется от положения равновесия на некоторый начальный угол φ_0, освобождается и под действием силы тяжести начинает совершать периодические колебания. Мы ищем период P этих колебаний.

Написать, что $P = f(l, m, \varphi_0)$, было бы ошибочно, ибо на Земле и на Луне маятник имеет разные периоды колебаний ввиду разницы в силе тяжести на поверхности этих тел. Сила тяжести на поверхности тела, например Земли, характеризуется величиной g ускорения свободного падения у поверхности этого тела.

Поэтому вместо невозможного соотношения $P = f(l, m, \varphi_0)$ следует считать, что $P = f(l, m, g, \varphi_0)$.

Напишем векторы размерности всех этих величин в базисе $\{L, M, T\}$:

	P	l	m	g	φ_0
L	0	1	0	1	0
M	0	0	1	0	0
T	1	0	0	−2	0

Видно, что векторы $[l]$, $[m]$, $[g]$ независимы и $[P] = \frac{1}{2}[l] - \frac{1}{2}[g]$.

В силу П-теоремы в форме соотношения (6) главы I отсюда следует, что

$$P = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \cdot f(1, 1, 1, \varphi_0).$$

Мы нашли, что $P = c(\varphi_0) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, где безразмерный множитель $c(\varphi_0)$ зависит только от безразмерного угла φ_0 начального отклонения (измеряемого в радианах).

Точное значение $c(\varphi_0)$ тоже можно найти, хотя на сей раз это уже не так просто. Это можно сделать, решая уравнение колебаний тяжёлого маятника и используя эллиптический интеграл

$$F(k, \varphi) := \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}.$$

А именно, $c(\varphi_0) = 4K\left(\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)\right)$, где $K(k) := F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$.