



В. А. Зорич

**Математический
анализ задач
естествознания**

УДК 517
ББК 22.16
386

Зорич В. А.
Математический анализ задач естествознания.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
155 с.
ISBN 978-5-4439-3225-5

Эта книга содержит записи годового экспериментального спецкурса естественнонаучного содержания. В нём представлены три темы:

- анализ размерностей физических величин с примерами приложений, включая модель турбулентности по Колмогорову;
- функции очень многих переменных и явление концентрации: нелинейный закон больших чисел, геометрический смысл распределений Гаусса и Максвелла, теорема Котельникова—Шеннона;
- классическая термодинамика и контактная геометрия: два начала термодинамики на языке форм, распределения и теорема Фробениуса, метрика Карно—Каратеодори.

Спецкурс предназначен в первую очередь математикам, но может быть также полезен студентам и специалистам иных специальностей.

В приложении помещена общедоступная статья автора «Математика как язык и метод».

Подготовлено на основе книги:

Зорич В. А. Математический анализ задач естествознания. — Новое изд., доп. — М.: МЦНМО, 2017. — 160 с. — ISBN 978-5-4439-1225-7

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3225-5

© Зорич В. А., 2018.
© МЦНМО, 2018.

Оглавление

Предисловие к первому изданию	7
Предисловие к новому изданию	9

Тема I

Анализ размерностей физических величин

Глава I. Элементы теории

§1. Размерность физической величины (начальные представления)	14
1.1. Измерение, единица измерения, процесс измерения	14
1.2. Основные и производные единицы	14
1.3. Зависимые и независимые единицы	15
§2. Формула размерности физической величины	15
2.1. Изменение числовых значений физической величины при изменении размеров основных единиц	15
2.2. Постулат инвариантности отношения значений одноимённых физических величин	16
2.3. Функция размерности и формула размерности физической величины в данном базисе	16
§3. Основная теорема теории размерностей	18
3.1. П-теорема	18
3.2. Принцип подобия	19

Глава II. Примеры приложений

§1. Период обращения тела на круговой орбите (законы подобия)	20
§2. Гравитационная постоянная. Третий закон Кеплера и показатель степени в законе всемирного тяготения Ньютона	21
§3. Период колебаний тяжёлого маятника (включение g)	22
§4. Расход объёма и массы на водосливе	23
§5. Сила сопротивления при движении шара в невязкой среде	23
§6. Сила сопротивления при движении шара в вязкой среде	24
§7. Упражнения	26
§8. Заключительные замечания	28

Глава III. Дальнейшие приложения: гидродинамика и турбулентность

§1. Уравнения гидродинамики (общие сведения)	32
§2. Потеря устойчивости течения и замечания о бифуркациях в динамических системах	34

§ 3. Турбулентность (начальные представления)	36
§ 4. Модель Колмогорова	36
4.1. Многочасштабность турбулентных движений	36
4.2. Развитая турбулентность и инерционный интервал	38
4.3. Удельная энергия	38
4.4. Число Рейнольдса движений данного масштаба	39
4.5. Закон Колмогорова—Обухова	39
4.6. Внутренний масштаб турбулентности	40
4.7. Энергетический спектр турбулентных пульсаций	40
4.8. Турбулентное перемешивание и расхождение частиц	40

Тема II

Многомерная геометрия и функции очень многих переменных

Глава I. Некоторые примеры функций очень многих переменных в естествознании и технике

§ 1. Цифровая запись сигнала (КИМ — кодово-импульсная модуляция) 46	46
1.1. Линейный прибор и его математическое описание (свёртка) 46	46
1.2. Фурье-двойственное (спектральное) описание линейного прибора	47
1.3. Функции и приборы с финитным спектром	48
1.4. Идеальный фильтр и его аппаратная функция	49
1.5. Теорема отсчётов (формула Котельникова—Шеннона)	49
1.6. Кодово-импульсная модуляция сигнала (КИМ)	51
1.7. Пропускная способность идеального канала связи	51
1.8. Оценка размерности TV-сигнала	52
§ 2. Некоторые другие области многопараметрических явлений и пространств большой размерности	52
2.1. Молекулярная теория вещества	52
2.2. Фазовое пространство в классической гамильтоновой меха- нике	53
2.3. Термодинамические ансамбли Гиббса	53
2.4. Теория вероятностей	53

Глава II. Принцип концентрации и его проявления

§ 1. Шар и сфера в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n при $n \gg 1$	54
1.1. Концентрация объёма шара при $n \rightarrow \infty$	54
1.2. Термодинамический предел	54
1.3. Концентрация площади сферы	55
1.4. Изопериметрическое неравенство и почти постоянство функции на сфере очень большой размерности	58
1.5. Концентрация меры, проявления и формализация	59

§2. Некоторые замечания	61
2.1. Различные средние	61
2.2. Многомерный куб и принцип концентрации	62
2.3. Принцип концентрации, термодинамика, эргодичность	64
2.4. Принцип концентрации и предельные распределения	66
Глава III. Связь при наличии помех	
§1. Дискретная запись непрерывного сигнала — конкретизация	67
1.1. Энергия и средняя мощность сигнала	67
1.2. Квантование по уровням	69
1.3. Идеальный многоуровневый канал связи	69
1.4. Помехи (белый шум)	69
§2. Пропускная способность канала связи с шумом	70
2.1. Грубая оценка пропускной способности канала с шумом	70
2.2. Геометрия сигнала и помехи	71
2.3. Теорема Шеннона	72
§3. Обсуждение теоремы Шеннона, примеры и дополнения	74
3.1. Комментарий Шеннона	74
3.2. Слабый сигнал в большом шуме	75
3.3. Избыточность языка	76
3.4. Тонкие измерения на грубом приборе	76
3.5. Код Шеннона — Фано	76
3.6. Статистические характеристики оптимального кода	77
3.7. Кодирование и декодирование — ε -энтропия и δ -ёмкость	78
§4. Математическая модель канала связи с помехами	81
4.1. Простейшая модель и постановка вопроса	81
4.2. Информация и энтропия (предварительные рассуждения)	82
4.3. Условная энтропия и информация	85
4.4. Интерпретация потери информации в канале с шумом	87
4.5. Расчёт пропускной способности абстрактного канала связи	89

Тема III

Классическая термодинамика и контактная геометрия

Глава I. Классическая термодинамика (начальные представления)

§1. Два начала термодинамики	94
1.1. Энергия и вечный двигатель	94
1.2. Вечный двигатель второго рода и энтропия	94
§2. Математическое оформление двух начал термодинамики	96
2.1. Дифференциальная форма теплообмена	97
2.2. Два начала термодинамики на языке дифференциальных форм	98
2.3. Термодинамика без тепла	100
2.4. Адиабатические переходы и аксиома Каратеодори	101

Глава II. Термодинамика и контактная геометрия

§ 1. Контактные распределения	104
1.1. Адиабатический процесс и контактное распределение	104
1.2. Формализация	104
§ 2. Интегрируемость распределений	105
2.1. Теорема Фробениуса	105
2.2. Интегрируемость, связность, управляемость	106
2.3. Метрика Карно—Каратеодори	107
2.4. Контактная форма Гиббса	108
2.5. Заключительные замечания	109

Глава III. Термодинамика классическая и статистическая

§ 1. Кинетические теории	112
1.1. Молекулы и давление	112
1.2. Распределение Максвелла	112
1.3. Энтропия по Больцману	113
1.4. Ансамбли Гиббса и термодинамизация механики	114
1.5. Эргодичность	115
1.6. Парадоксы, проблемы, трудности	117
§ 2. Квантовая статистическая термодинамика (два слова)	121
2.1. Счёт состояний и условный экстремум	121
2.2. Уточняющие замечания и дополнения	123

Литература 131

Приложение. Математика как язык и метод 145

Непредвиденный эпилог 155

Глава I

Элементы теории

§1. Размерность физической величины (начальные представления)

1.1. Измерение, единица измерения, процесс измерения

Все перечисленные понятия фундаментальны и подвергались анализу лучшими представителями науки, физики и математики в первую очередь. Такой анализ приводит к анализу понятий пространства, твёрдого тела, движения, времени, причинности и т. п.

Мы здесь не собираемся погружаться так глубоко. Отметим, однако, что каждая теория хорошо моделирует некоторую сферу явлений только в каких-то масштабах. В каких именно, мы, к сожалению, порой узнаём только тогда, когда теория перестаёт согласовываться с действительностью. Именно в эти моменты мы обычно вновь возвращаемся к фундаменту теории, подвергая его тщательному анализу и должной реконструкции.

А сейчас давайте начнём с накопления доступного нам полезного конкретного материала.

1.2. Основные и производные единицы

В быту мы постоянно пользуемся какими-то единицами измерения длины, массы, времени, силы, скорости, энергии, мощности... Какие-то из них мы выделяем как основные, а какие-то при этом уже оказываются производными.

Примеры основных единиц:

L — единица длины *метр* (м или m);

M — единица массы *килограмм* (кг или kg);

T — единица времени *секунда* (с или s).

Примеры производных единиц:

v — скорость (м/с или m/s) $[v] = LT^{-1}$;

V — объём (м³ или m³) $[V] = L^3$;

a — ускорение ($\text{м}/\text{с}^2$ или $\text{м}/\text{с}^2$) $[a] = LT^{-2}$;
 l — световой год $[l] = [cT] = L$;
 F — сила, $F = ma$, $[F] = [ma] = MLT^{-2}$.

Намечается общее наблюдение о формуле $L^{d_1}M^{d_2}T^{d_3}$ размерности механической физической величины; $\{d_1, d_2, d_3\}$ — вектор размерности в базисе $\{L, M, T\}$.

Разовьём эту векторную алгебро-геометрическую аналогию.

1.3. Зависимые и независимые единицы

Пример. Единицы величин v, a, F независимы и тоже могут быть приняты за основные, так как

$$[L] = v^2 a^{-1}, \quad [M] = Fa^{-1}, \quad [T] = va^{-1}.$$

Намечается аналогия с векторным пространством, его базисом и системами независимых векторов. (Более глубокий смысл этой аналогии откроется ниже.)

§ 2. Формула размерности физической величины

2.1. Изменение числовых значений физической величины при изменении размеров основных единиц

Пример. Если расстояния измерять в километрах (т. е. вместо одного метра за единицу измерения длин принять в 1000 раз большую единицу, 1 км), то одна и та же физическая длина будет иметь разные численные значения по отношению к этим двум единицам длины, а именно: $1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$, $L \text{ км} = 10^3 L \text{ м}$, $1 \text{ м} = 10^{-3} \text{ км}$, $L \text{ м} = 10^{-3} L \text{ км}$. Таким образом, изменение единицы длины в α раз приводит к изменению числового значения L м всех измеряемых длин в α^{-1} раз, т. е. значение L заменится на $\alpha^{-1}L$.

Это же относится и к возможному изменению единиц массы и времени (тонна, грамм, миллиграмм; час, сутки, год, миллисекунда...).

Значит, если физическая величина в базисе $\{L, M, T\}$ имеет размерность $L^{d_1}M^{d_2}T^{d_3}$, т. е. $\{d_1, d_2, d_3\}$ — её вектор размерности, то изменение единиц измерения длины, массы и времени в $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ раз соответственно, по-видимому, должно приводить к изменению числового значения этой величины в $\alpha_1^{-d_1}\alpha_2^{-d_2}\alpha_3^{-d_3}$ раз.

2.2. Постулат инвариантности отношения значений одноимённых физических величин

Пример. Площадь треугольника есть функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ длин трёх его сторон. Возьмём другой треугольник и подсчитаем его площадь $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

При изменении размера единицы длины числовые значения y и \tilde{y} изменятся. Однако их отношение \tilde{y}/y при этом останется неизменным.

Пусть теперь имеется две однотипные физические величины, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)$, зависящие не от трёх, а от любого конечного набора только длин, или масс, или времён...

В теории размерностей принимается следующий основной постулат.

Постулат абсолютности отношений:

$$\frac{\tilde{y}}{y} = \frac{f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)}{f(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{f(\alpha\tilde{x}_1, \alpha\tilde{x}_2, \dots, \alpha\tilde{x}_m)}{f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m)}. \quad (1)$$

Иными словами, постулируется, что при изменении масштаба основной единицы (длины, массы, времени...) однотипные физические величины y, \tilde{y} (все площади, все объёмы, все скорости, все силы...) меняют своё числовое значение в одно и то же число раз (своё для каждого типа величин).

2.3. Функция размерности и формула размерности физической величины в данном базисе

Равенство (1) показывает, что отношение

$$\frac{f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_m)}{f(x_1, x_2, \dots, x_m)} =: \varphi(\alpha)$$

зависит только от α . Это позволяет указать вид функции $\varphi(\alpha)$.

Заметим сначала, что

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \quad (2)$$

Действительно,

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \frac{f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \dots, \alpha_1 x_m)}{f(\alpha_2 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_2 x_m)} = \frac{f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2, \dots, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_m\right)}{f(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

Здесь крайние равенства непосредственно следуют из определения функции φ ; а учитывая независимость φ от переменных

(x_1, x_2, \dots, x_m) , можно перейти к переменным $\alpha_2^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и получить среднее равенство.

Считая, что φ — регулярная функция, продифференцируем соотношение (2) по α_1 , и, положив затем $\alpha_1 = \alpha_2$, придём к уравнению

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \varphi'(1).$$

Поскольку $\varphi(1) = 1$, решение этого уравнения при таком условии имеет вид

$$\varphi(\alpha) = \alpha^d.$$

Итак, найденный вид функции φ является следствием принятого постулата теории размерностей физических величин. В формулировке постулата мы для простоты начальных рассмотрений считали, что все переменные (x_1, x_2, \dots, x_m) имеют одинаковый характер (длины, или массы, или времени, или скорости...). Но ясно, что любую функциональную зависимость физической величины от набора физических переменных можно представить в виде

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, y_1, y_2, \dots, y_{m_2}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k}),$$

где однотипные физические переменные собраны в группы и обозначены общим символом (мы не хотели вводить нумерацию групп).

Это означает, что

$$\frac{f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \dots, \alpha_1 x_{m_1}, \dots, \alpha_k z_1, \alpha_k z_2, \dots, \alpha_k z_{m_k})}{f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k})} = \alpha_1^{d_1} \dots \alpha_k^{d_k},$$

если переменные разных групп допускают независимое изменение масштабов. В таком случае в рамках действия постулата мы нашли закон

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1, \alpha_1 x_2, \dots, \alpha_1 x_{m_1}, \dots, \alpha_k z_1, \alpha_k z_2, \dots, \alpha_k z_{m_k}) = \\ = \alpha_1^{d_1} \dots \alpha_k^{d_k} f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k}) \end{aligned} \quad (3)$$

изменения численного значения физической величины

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{m_k})$$

при изменении масштабов единиц физически независимых переменных.

Набор (d_1, \dots, d_k) называют *вектором размерности* или просто *размерностью* величины y по отношению к выделенным независимым физическим единицам измерения.

Функцию $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_1^{d_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{d_k}$ называют *функцией размерности*.

Символом $[y]$ в зависимости от контекста обозначают либо вектор размерности, либо функцию размерности.

Физическую величину называют *безразмерной*, если её вектор размерности нулевой.

Например, если $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_1^{d_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{d_k}$ — функция размерности физической величины y по отношению к независимым физическим величинам $\{x_1, \dots, x_k\}$, то отношение

$$\Pi := \frac{y}{x_1^{d_1} \cdot \dots \cdot x_k^{d_k}}$$

является безразмерной величиной относительно $\{x_1, \dots, x_k\}$.

§3. Основная теорема теории размерностей

3.1. Π -теорема¹

Теперь рассмотрим общий случай зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) \quad (4)$$

физической величины y от переменных величин x_1, x_2, \dots, x_n , среди которых только первые k являются физически (размерно) независимыми в смысле обсуждаемой нами теории размерностей физических величин.

Приняв x_1, x_2, \dots, x_k за единицы измерения соответствующих величин, т. е. меняя масштаб, полагая $\alpha_1 = x_1^{-1}, \dots, \alpha_k = x_k^{-1}$, мы из равенства (3) получим соотношение

$$\Pi = f(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (5)$$

между безразмерными величинами

$$\Pi = \frac{y}{x_1^{d_1} \cdot \dots \cdot x_k^{d_k}}, \quad \Pi_i = \frac{x_{k+i}}{x_1^{d_{i1}} \cdot \dots \cdot x_k^{d_{ik}}}, \quad \text{где } i = 1, \dots, n - k.$$

¹Её также называют теоремой Бакингема, связывая её появление с работами: *Buckingham E. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations // Phys. Rev. 1914. Vol. 4. P. 345—376;* и *Buckingham E. The principle of similitude // Nature 1915. Vol. 96. P. 396—397.*

В неявной форме Π -теорема и принцип подобия содержатся также в работе: *Jeans J. H. Proc. Roy. Soc. 1905. Vol. 76. P. 545,* не говоря о том, что законами подобия по существу владели уже Ньютон и Галилей. Историю вопроса можно найти в работе [5] вместе со ссылкой на работу [6], где уже есть всё, кроме названия Π -теорема. В этой связи укажем ещё на любопытные публикации [7] и [8].

Равенство (5) можно переписать в виде

$$y = x_1^{d_1} \cdot \dots \cdot x_k^{d_k} \cdot f(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (6)$$

Итак, пользуясь масштабной однородностью зависимостей между физическими величинами, выраженной в сформулированном выше постулате, мы можем перейти от соотношения (4) к соотношению (5) между безразмерными величинами, уменьшив при этом число переменных; или мы можем перейти к равносильному (5) соотношению (6), выделив явно всю размерную составляющую величины y по отношению к максимальной системе x_1, x_2, \dots, x_k размерно независимых переменных.

Возможность такого перехода от общего соотношения (4) к более простым соотношениям (5) или (6) и составляет содержание так называемой *П-теоремы* — основной теоремы теории размерностей физических величин, которую мы сейчас доказали.

3.2. Принцип подобия

Содержание, смысл, возможности П-теоремы и подводные камни, связанные с ней, будут раскрываться ниже по мере рассмотрения конкретных примеров её использования.

Но одна идея весьма эффективного (и эффектного) приложения доказанной теоремы лежит прямо на поверхности и очевидна: не ломая самолёты, корабли и прочие объекты, многие эксперименты можно проводить в лаборатории над моделями, пересчитывая затем с помощью П-теоремы результаты (например, экспериментально найденную безразмерную зависимость (5)) к конкретным натуральным размерам объектов (по формуле (6)).

Глава II

Примеры приложений

Рассмотрим теперь некоторые примеры, на которых прояснятся различные стороны доказанной II-теоремы.

§1. Период обращения тела на круговой орбите (законы подобия)

Тело массы m удерживается на круговой орбите радиуса r центральной силой F . Надо найти период обращения

$$P = f(r, m, F).$$

Здесь и далее фиксируем стандартный для механики базис основных физических единиц (длина, масса, время), которые, следуя Максвеллу, мы будем обозначать $\{L, M, T\}$. (В термодинамике символ T используется для обозначения абсолютной температуры, но, если не оговорено иное, мы пока используем это обозначение для единиц времени.)

Найдём векторы размерности величин P, r, m, F в базисе $\{L, M, T\}$. Запишем их столбцами следующей таблицы:

	P	r	m	F
L	0	1	0	1
M	0	0	1	1
T	1	0	0	-2

Поскольку функция размерности, как мы показали, всегда имеет степенной вид, перемножению таких функций отвечает сложение соответствующих показателей степени, т. е. в итоге отвечают линейные операции над векторами размерности соответствующих физических величин.

Значит, используя стандартную линейную алгебру, можно находить системы независимых величин по матрице, образованной их векторами размерности, а также, раскладывая вектор размерности какой-то величины по векторам размерности выбранных независи-

мых величин, находить формулу размерности этой величины в системе независимых величин конкретной задачи.

Так, в нашем случае величины r , m , F независимы, ибо матрица, образованная их векторами размерности $[r]$, $[m]$, $[F]$, невырождена. Найдя разложение $[P] = \frac{1}{2}[r] + \frac{1}{2}[m] - \frac{1}{2}[F]$, на основании формулы (6) главы I можно сразу написать, что

$$P = \left(\frac{mr}{F}\right)^{1/2} \cdot f(1, 1, 1).$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя $c = f(1, 1, 1)$ (который можно найти в единичном лабораторном эксперименте), мы нашли зависимость P от r , m , F .

Конечно, зная закон Ньютона $F = m \cdot a$, в данном случае легко можно было бы найти и окончательную формулу, где $c = 2\pi$.

Однако всё, что мы использовали, — это лишь общее указание о существовании зависимости $P = f(r, m, F)$.

§ 2. Гравитационная постоянная.

Третий закон Кеплера и показатель степени в законе всемирного тяготения Ньютона

Вслед за Ньютоном найдём показатель степени α в законе всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^\alpha}.$$

Используем предыдущую задачу и известный Ньютону третий закон Кеплера, который применительно к круговым орбитам означает, что квадраты периодов обращения планет (относительно центрального тела массы M) относятся как кубы радиусов их орбит. В силу результата предыдущей задачи и закона всемирного тяготения с пока ещё не найденным показателем α имеем

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{m_1 r_1}{F_1}\right) / \left(\frac{m_2 r_2}{F_2}\right) = \left(\frac{m_1 r_1}{m_1 \frac{M}{r_1^\alpha}}\right) / \left(\frac{m_2 r_2}{m_2 \frac{M}{r_2^\alpha}}\right) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha+1}.$$

Но по закону Кеплера $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$.

Значит, $\alpha = 2$.

§3. Период колебаний тяжёлого маятника (включение g)

После сделанных при решении первой задачи подробных разъяснений мы можем теперь позволить себе более компактное изложение, с остановками только на каких-то новых обстоятельствах.

Найдём период колебаний маятника. Точнее: груз массы m , закреплённый на конце невесомого подвеса длины l , отклоняется от положения равновесия на некоторый начальный угол φ_0 , освобождается и под действием силы тяжести начинает совершать периодические колебания. Мы ищем период P этих колебаний.

Написать, что $P = f(l, m, \varphi_0)$, было бы ошибочно, ибо на Земле и на Луне маятник имеет разные периоды колебаний ввиду разницы в силе тяжести на поверхности этих тел. Сила тяжести на поверхности тела, например Земли, характеризуется величиной g ускорения свободного падения у поверхности этого тела.

Поэтому вместо невозможного соотношения $P = f(l, m, \varphi_0)$ следует считать, что $P = f(l, m, g, \varphi_0)$.

Напишем векторы размерности всех этих величин в базисе $\{L, M, T\}$:

	P	l	m	g	φ_0
L	0	1	0	1	0
M	0	0	1	0	0
T	1	0	0	-2	0

Видно, что векторы $[l]$, $[m]$, $[g]$ независимы и $[P] = \frac{1}{2}[l] - \frac{1}{2}[g]$.

В силу П-теоремы в форме соотношения (6) главы I отсюда следует, что

$$P = \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \cdot f(1, 1, 1, \varphi_0).$$

Мы нашли, что $P = c(\varphi_0) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, где безразмерный множитель $c(\varphi_0)$ зависит только от безразмерного угла φ_0 начального отклонения (измеряемого в радианах).

Точное значение $c(\varphi_0)$ тоже можно найти, хотя на сей раз это уже не так просто. Это можно сделать, решая уравнение колебаний тяжёлого маятника и используя эллиптический интеграл

$$F(k, \varphi) := \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

А именно, $c(\varphi_0) = 4K\left(\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)\right)$, где $K(k) := F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$.