В. А. Варгаузин, И. А. Цикин

Методы повышения энергетической и спектральной эффективности цифровой радиосвязи

В. А. Варгаузин
И. А. Цикин

Методы повышения энергетической и спектральной эффективности цифровой радиосвязи

Рекомендовано УМО по образованию
в области Инфокоммуникационных технологий и систем связи
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 210700 — Инфокоммуникационные
технологии и системы связи квалификации (степени) «бакалавр»
и квалификации (степени) «магистр»

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2013

УДК 621.39(075.8)
ББК 32.973(я73)
В18

Варгаузин, В. А.

В18 Методы повышения энергетической и спектральной эффективности цифровой радиосвязи: учеб. пособие / В. А. Варгаузин, И. А. Цикин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2013. — 352 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0878-0

В систематизированном виде излагаются вопросы, связанные с энергетическими затратами и полосой занимаемых частот, необходимых для передачи сообщений в современных системах цифровой радиосвязи: анализ основных информационных характеристик систем цифровой радиосвязи и получение на их основе предельных значений показателей энергетической и спектральной эффективности; основные методы модуляции, обеспечивающие достижение высоких показателей раздельно энергетической или спектральной эффективности; методы достижения компромисса между энергетической и спектральной эффективностью; турбокодирование и применение составных кодов. Достижение наивысших показателей эффективности иллюстрируется на примере современных сигнально-кодовых конструкций. Для более глубокого изучения материала изложены специальные вопросы помехоустойчивого кодирования.

Для студентов технических вузов, инженеров и специалистов, работающих в области инфокоммуникационных технологий и систем связи

УДК 621.39(075.8)
ББК 32.973(я73)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

О. С. Когновицкий, д-р техн. наук, проф. Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Ю. С. Шинаков, д-р техн. наук, проф. Московского технического университета связи и информатики

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Марины Дамбиевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*

Подписано в печать 29.03.13.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 28,38.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-0878-0

Оглавление

Список сокращений **7**
Список сокращений на русском языке 7
Список сокращений на английском языке 8

Введение **11**

Глава 1. Информационные характеристики систем цифровой радиосвязи **15**
1.1. Количество информации, содержащейся в сообщении 15
1.2. Избыточность алфавита 18
1.3. Дискретный канал и его основные характеристики 20
1.4. Дискретный канал без шума 21
1.4.1. Пропускная способность 21
1.4.2. Кодирование источника 22
1.5. Дискретный канал с шумом 24
1.6. Непрерывный канал 27
1.6.1. Модель непрерывного канала. Дифференциальная энтропия 27
1.6.2. Пропускная способность непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом, имеющим равномерный спектр в ограниченной полосе 29
1.6.3. Теорема кодирования для непрерывного канала 33
1.7. Предельные показатели эффективности 34

Глава 2. Передача дискретных сообщений в непрерывном канале **37**
2.1. Преобразование сообщений в сигналы и задача синтеза оптимального демодулятора 37
2.1.1. Канальное кодирование сообщений 37
2.1.2. Задачи демодулятора 39
2.1.3. Оптимальные стратегии принятия решений при демодуляции 42
2.2. Алгоритм оптимального когерентного различения сигналов 47
2.3. Посимвольный прием с «жесткими» решениями. Двоичные ансамбли сигналов 51
2.3.1. Вероятность ошибочных решений 51
2.3.2. Относительная фазовая модуляция 55
2.3.3. Модуляция с минимальным сдвигом частоты 60
2.3.4. Гауссова модуляция с минимальным сдвигом частоты 68
2.4. Посимвольный прием с «жесткими» решениями. Многопозиционные системы передачи 72
2.4.1. Вероятность ошибочных решений 72

2.4.2. Потенциальная энергетическая эффективность цифровых систем 75
2.4.3. Ансамбли составных ортогональных, биортогональных и симплексных сигналов 79
2.5. Методы повышения спектральной эффективности 82
2.5.1. Квадратурная фазовая модуляция 82
2.5.2. Многократная фазовая модуляция 87
2.5.3. Амплитудно-фазовая модуляция 92
2.6. Методы борьбы с межсимвольной интерференцией 96
2.6.1. Устранение влияния межсимвольной интерференции в отсчетных точках 97
2.6.2. Эквалайзеры 105
2.6.3. Модуляция с одновременной передачей на ортогональных поднесущих частотах 115

Глава 3. Блоковые и сверточные коды 121
3.1. Компромисс между энергетической и спектральной эффективностью на основе использования составных сигналов 121
3.2. Принцип помехоустойчивого кодирования 123
3.2.1. Возможность обнаружения и исправления ошибок 123
3.2.2. Оптимизация процедуры декодирования 126
3.2.3. Оценка эффективности помехоустойчивого кодирования 128
3.3. Линейные блоковые коды 133
3.3.1. Базовые свойства 133
3.3.2. Кодирование 135
3.3.3. Система проверок 137
3.3.4. Возможности декодирования 139
3.3.5. Циклические коды 141
3.3.6. Циклические коды для борьбы с пакетами ошибок 143
3.4. Сверточные коды 147
3.4.1. Основные определения 147
3.4.2. Нерекурсивный кодер (случай $k = 1$) 148
3.4.3. Решетчатые диаграммы 151
3.4.4. Свободное расстояние 154
3.4.5. Свойство прозрачности 159
3.4.6. Нерекурсивный кодер (случай $k > 1$) 160
3.4.7. Ререкурсивный кодер (случай $k = 1$) 163
3.4.8. Ререкурсивный кодер (случай $k > 1$) 167
3.4.9. Декодирование сверточных кодов 168
3.5. Перемежение кодовых символов 179

Глава 4. Комбинированные методы кодирования 181
4.1. Турбокоды 181
4.2. Составные коды 186
4.2.1. Каскадные коды 187
4.2.2. Коды произведения 189
4.2.3. Гибридные схемы кодирования 190
4.2.4. Обобщенный каскадный код 192
4.3. Сигнально-кодовые конструкции 194
4.3.1. Общие принципы 194
4.3.2. Решетчато-кодовая модуляция на основе МФМ 197
4.3.3. Решетчато-кодовая модуляция на основе КАМ 204

4.3.4. Многоуровневая кодовая модуляция 208
4.3.5. Кодовая модуляция с битовым перемежением 210
4.4. Сравнительные показатели эффективности методов модуляции и кодирования 213

Глава 5. Специальные вопросы помехоустойчивого кодирования 223
5.1. Свойства блоковых кодов 223
5.1.1. Верхняя граница корректирующей способности (граница Хэмминга) 224
5.1.2. Параметры плотноупакованных кодов 226
5.2. Построение и свойства линейных блоковых кодов 228
5.2.1. Связь минимального расстояния с системой проверок кода 228
5.2.2. Нижняя граница минимального расстояния (граница Варшамова — Гильберта) 233
5.2.3. Верхняя граница вероятности ошибки 237
5.2.4. Построение недвоичного кода. Конечное поле 240
5.3. Методы декодирования линейных блоковых кодов 241
5.3.1. Синдромное декодирование 241
5.3.2. Метод неполного декодирования 244
5.3.3. Декодирование «мягких» решений 245
5.4. Построение и свойства циклических кодов 247
5.4.1. Математическая структура кода 247
5.4.2. Условие существования кода 254
5.4.3. Система проверок 257
5.4.4. Схемы кодирования 259
5.4.5. Синдромное декодирование 263
5.4.6. Свойство обнаружения пакетов ошибок 264
5.4.7. Построение кодов CRC 266
5.5. Построение и декодирование кодов Рида — Соломона и БЧХ 268
5.5.1. «Спектральный» метод построения кодов 269
5.5.2. Построение кодов Рида — Соломона 272
5.5.3. Построение двоичных кодов БЧХ 274
5.5.4. Алгебраическое декодирование 278
5.6. Декодер СК, оптимальный по критерию максимума апостериорной вероятности информационного символа 282
5.7. Итеративное декодирование турбокода 290
5.8. Итеративное декодирование линейного блокового кода (с малой плотностью проверок на четность) 299
5.8.1. Основные определения и требования к проверочным матрицам 301
5.8.2. Построение алгоритма итеративного декодирования 305
5.8.3. «Логарифмическая» версия алгоритма декодирования 309
5.8.4. Систематическое кодирование 310
5.9. «Мягкие» решения о двоичных канальных символах в системах с МФМ и КАМ при помехоустойчивом кодировании 313

Приложение 1. Алгоритм Витерби 319

Приложение 2. Обобщенная модель канала с МСИ 327

Приложение 3. Правила вычислений в конечных полях 333

Список литературы 339

Предметный указатель 341

Список сокращений

Список сокращений на русском языке

АФМ — амплитудно-фазовая модуляция.
БПФ — быстрое преобразование Фурье.
БЧХ — код Боуза — Чоудхури — Хоквингема.
ГММС — гауссова модуляция с минимальным сдвигом частоты.
ДПП — дискретное преобразование в поле Галуа.
ДПФ — дискретное преобразование Фурье.
ДСК — дискретный симметричный канал.
ДТК — дубинарный турбокод.
ИНК — итеративный алгоритм наименьших квадратов.
КАМ — квадратурная амплитудная модуляция.
КМБП — кодовая модуляция с битовым перемежением.
КП — код произведения.
КФМ — квадратурная (двукратная) фазовая модуляция.
КФМС — квадратурная фазовая модуляция со сдвигом.
ЛОП — логарифм отношения правдоподобия.
МКМ — многоуровневая кодовая модуляция.
ММС — модуляция с минимальным сдвигом частоты.
МП — метод максимального правдоподобия.
МСИ — межсимвольная интерференция.
МФМ — многократная фазовая модуляция.
МЧМ — многократная частотная модуляция.
НОК — наименьшее общее кратное.
НК — метод наименьших квадратов.
ННК — нерекурсивный кодер несистематического сверточного кода.
НП — низкоплотностный код (синоним кода с малой плотностью проверок на четность (англ. *LDPC*)).

ОКК — обобщенный каскадный код.

ОПС — основная полоса сигнала.

ОФМ — относительная фазовая модуляция.

РКМ — решетчато-кодовая модуляция.

РНК — адаптивный рекурсивный алгоритм наименьших квадратов.

РС — код Рида — Соломона.

РСК — рекурсивный кодер систематического сверточного кода.

СК — сверточный код.

СКК — сигнально-кодовая конструкция.

СКО — среднеквадратическое отличие.

ССВ — правило «сложить — сравнить — выбрать».

ТК — турбокод.

ТКП — турбокод произведения.

ФАПЧ — фазовая автоподстройка частоты.

ФМ-2 — фазовая модуляция на 180°.

ФМ-4 — синоним КФМ.

ФРМ — фазоразностная модуляция.

ФНЧ — фильтр низкой частоты.

ЧМ — частотная модуляция.

ЧМ-2 — двукратная частотная модуляция.

ЧМНФ — частотная модуляция с непрерывной фазой.

Список сокращений на английском языке

ACS — Add-Compare-Select (правило «сложить — сравнить — выбрать»).

APP — A Posteriori Probability (апостериорная вероятность).

APSK — Amplitude Phase Shift Keying (амплитудно-фазовая модуляция).

BER — Bit Error Rate (Вероятность ошибки двоичного символа).

BICM — Bit-Interleaved Coded Modulation (кодовая модуляция с битовым перемежением).

BPSK — BinaryPhase Shift Keying (фазовая модуляция на 180°).

BSC — Binary Symmetric Channel (двоичный (дискретный) симметричный канал).

BP — Belief Propagation (алгоритм с «распространением доверия»).

BTC — Block Turbo Code (блоковый турбокод).

CPFSK — Continuous Phase Frequency Shift Keying (частотная модуляция с непрерывной фазой).

CTC — Convolution Turbo Code (сверточный турбокод).

DBPSK — Differential Binary Phase Shift Keying (относительная фазовая модуляция).

DBTC — Duo-binary Turbo Code (дубинарный турбокод).

DFE — Decision Feedback Equalizer (эквалайзер с обратной связью по решению).
DFT — Discrete Fourier Transform (дискретное преобразование Фурье).
FFT — Fast Fourier Transform (быстрое преобразование Фурье).
GF — Galois Field (поле Галуа).
GMSK — Gaussian MSK (гауссова модуляция с минимальным сдвигом частоты).
ISI — Intersymbol Interference (межсимвольная интерференция).
LDPC — Low-Density Parity-Check (код с малой плотностью проверок на четность).
LE — Linear Equalizer (линейный эквалайзер).
LLR — Log-Likelihood Ratio (логарифм отношения правдоподобия).
LMS — Least Mean Square (наименьший средний квадрат).
Log-MAP — Log- Maximum a Posteriori Probability (логарифм максимума апостериорной вероятности).
MAP — Maximum a Posteriori Probability (максимум апостериорной вероятности).
MFSK —Multiple Frequency Shift Keying (многократная частотная модуляция).
MLCM — MultiLevel Coded Modulation (многоуровневая кодовая модуляция).
MLSE — Maximum-Likelihood Sequence Estimation (максимально правдоподобная оценка).
MPA — Message Passing Algorithm (алгоритм обмена (обновленными) сообщениями).
MPSK — Multiple Phase Shift Keying (многократная фазовая модуляция).
MSK — Minimum Shift Keying (модуляция с минимальным сдвигом частоты).
NNK — Nonrecursive Nonsistematic Coder (нерекурсивный кодер несистематического сверточного кода).
OFDM — Orthogonal Frequency Division Multiplexing (метод передачи с ортогональным частотным разделением).
OQPSK — Offset Quadrature (Quaternary) Phase Shift Keying (квадратурная (двукратная) фазовая модуляция со сдвигом).
PCCC — Parallel Concatenated Convolutional Coding (параллельная составная схема сверточного кодирования).
QAM — Quadrature Amplitude Modulation (квадратурная амплитудная модуляция).
QPSK — Quadrature (Quaternary) Phase Shift Keying (квадратурная (двукратная) фазовая модуляция).
RLS — Recursive Least Squares (рекурсивный алгоритм наименьших квадратов).
RSC — Recursive Systematic Coder (рекурсивный кодер систематического сверточного кода).
SCCC — Serially Concatenated Convolutional Coding (последовательная составная схема сверточного кодирования).
SER — Symbol Error Rate (вероятность ошибки символа).
SISO — Soft Input Soft Output («мягкий» вход и «мягкий» выход).
TCM — Trellis Coded Modulation (решетчато-кодовая модуляция).
TPC — Turbo Product Code (турбокод произведения).

Введение

Основной задачей любой системы радиосвязи является эффективная, в том или ином смысле, передача информации, содержащейся в сообщениях. При этом термин «информация» определяет совокупность сведений о каких-либо событиях, процессах, объектах, явлениях и т. п., причем эти сведения рассматриваются в аспекте их передачи во времени и пространстве. В свою очередь, термин «сообщение» означает информацию, выраженную в такой форме (например, последовательность каких-либо знаков), которая обеспечивает возможность передачи от источника информации к получателю.

Материальным носителем сообщения, а следовательно, и самой информации является *сигнал*. Сигнал представляет собой физический процесс, определенные параметры которого однозначно соответствуют передаваемому сообщению. В радиотехнических системах в качестве таких процессов выступают электромагнитные колебания, так что информация передается с помощью электрических сигналов. Процесс преобразования сообщения в сигнал называется *модуляцией* (иногда *манипуляцией*).

Передаваемые сообщения могут быть непрерывными или дискретными. *Непрерывные сообщения* могут быть представлены отрезками реализаций непрерывных случайных процессов, каковыми являются электрические сигналы, создаваемые микрофоном (например, при передаче речи или музыки), датчиками непрерывно изменяющихся физических величин (давление, влажность, температура и т. п.) или другими подобными устройствами.

Дискретные сообщения — такие сообщения, любое из которых представляет собой последовательность некоторых элементарных сообщений $\hat{u}_k$ $(k = 1, 2, ..., l)$. Конечное множество $\{\hat{u}\}$ этих элементарных сообщений называется алфавитом источника дискретных сообщений, а сами элементарные сообщения $\hat{u}_k$ — *элементами (буквами, символами) алфавита*. Общее количество элементов алфавита l называется *объемом алфавита*.

Источник дискретных сообщений — любое устройство, генерирующее последовательности элементов алфавита. Типичным источником дискретных сообщений является *двоичный* источник, или источник *двоичных сообщений*, когда $l = 2$. При этом, например, $\hat{u}_1 = 0;\ \hat{u}_2 = 1,$ а соответствующий алфавит называется *двоичным* алфавитом. Другим примером является источник, алфавит которого имеет объем $l = 32,$ когда каждый элемент $\hat{u}_k$ является буквой русского алфавита.

Радиотехнические системы, осуществляющие передачу сигналов, соответствующих дискретным сообщениям, называются *цифровыми* системами в отличие от *аналоговых*, в которых передаваемые сигналы являются результатом модуляции колебания несущей частоты непрерывными сообщениями.

В современных системах передачи информации исходные непрерывные сообщения часто преобразуются в *цифровую форму*, когда в результате процедур *дискретизации* и *квантования*, выполняемых с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП), каждое выборочное значение исходного непрерывного сообщения преобразуется в соответствующую последовательность элементов некоторого вспомогательного (обычно двоичного) алфавита. Независимо от дальнейших возможных преобразований такой последовательности в итоге получаются дискретные сообщения, которые можно рассматривать как результат работы некоторого эквивалентного источника дискретных сообщений со своим алфавитом (как правило, двоичным). Таким образом, в данном случае исходные непрерывные сообщения передаются с помощью цифровой системы передачи информации. На приемном конце системы радиосвязи в таком случае обычно производится обратное преобразование, называемое *восстановлением непрерывного сообщения*, например, с помощью цифроаналогового преобразователя (ЦАП).

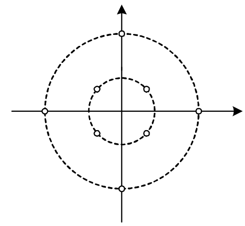
В зависимости от назначения и условий функционирования системы радиосвязи ее эффективность оценивается на основании тех или иных показателей (критериев), основными из которых являются энергетический и спектральный. Соответственно, важнейшими характеристиками любой системы радиосвязи являются *энергетическая* и *спектральная эффективность*, характеризующие, соответственно, энергетические затраты и полосу занимаемых частот, необходимые для передачи сообщений.

К сожалению, одновременное достижение предельных значений этих показателей эффективности оказывается невозможным, так что в каждом конкретном случае построения системы радиосвязи приходится руководствоваться компромиссными соображениями при оптимизации характеристик и режимов функционирования системы.

В настоящем учебном пособии рассматриваются методы повышения как энергетической, так и спектральной эффективности современных цифровых радиотехнических систем передачи информации — *цифровой радиосвязи.*

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и 210400 «Радиотехника», и базируется на материале курса «Радиотехнические цепи и сигналы» (сигналы, спектры сигналов, дискретизация и квантование, теорема Котельникова, дискретное преобразование Фурье) и соответствующих разделов курсов «Статистическая теория радиотехнических систем» и «Основы теории связи», а также на базовых знаниях в области теории вероятностей и теории случайных процессов.

Глава 1 включает анализ основных информационных характеристик систем цифровой радиосвязи и получение на их основе предельных значений показателей как энергетической, так и спектральной эффективности. В *главе 2* рассмотрены основные методы модуляции, позволяющие обеспечить достижение высоких показателей раздельно энергетической или спектральной эффективности. *Глава 3* посвящена изложению методов достижения компромисса между энергетической и спектральной эффективностью на основе использования составных сигналов и помехоустойчивого кодирования блоковыми и сверточными кодами. Эти методы получают свое развитие в *главе 4* при изложении вопросов турбокодирования и применения различного вида составных кодов. Достижение наивысших показателей эффективности иллюстрируется на примере современных сигнально-кодовых конструкций. В заключение этой главы рассматриваются показатели различных методов модуляции и кодирования в сравнении с предельными значениями, определяемыми границей Шеннона. *Глава 5* посвящена изложению специальных вопросов помехоустойчивого кодирования и может рассматриваться как дополнительная, предназначенная для более глубокого изучения материала.



ГЛАВА 1

Информационные характеристики систем цифровой радиосвязи

1.1. Количество информации, содержащейся в сообщении

В процессе передачи сообщений источник формирует последовательность передаваемых элементов алфавита $\{\hat{u}\}$. Степень неопределенности в генерировании источником того или иного очередного элемента алфавита характеризуется величиной $H(u)$, называемой *энтропией алфавита.*

Пусть все элементы алфавита статистически независимы и равновероятны. Тогда, очевидно, количественная мера рассматриваемой неопределенности должна быть равна нулю в случае $l=1$ (неопределенность отсутствует) и прямо пропорциональна объему алфавита l. В качестве такой количественной меры в теории информации выбирается величина

$$H(u) = \log l. \tag{1.1}$$

За единицу неопределенности обычно выбирают двоичную единицу (дв. ед.), или один бит как неопределенность, имеющую место при выборе двоичным источником $(l=2)$ любого из двух равновероятных и статистически независимых элементов. При этом в (1.1) и везде далее (за исключением натуральных логарифмов в общепринятом обозначении) используются двоичные логарифмы.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда элементы алфавита источника по-прежнему статистически независимы, но вероятности генерирования их источником $p(\hat{u}_k)$ различны, т. е.

$$p(\hat{u}_k) \neq \text{const}(k), \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Очевидно, что неопределенность в появлении конкретного элемента $\hat{u}_k$ обратно пропорциональна вероятности $p(\hat{u}_k)$. По-прежнему выбирая, аналогично (1.1), логарифмическую количественную меру неопределенности и связывая с конкретным элементом $\hat{u}_k$ неопределенность $\log\left(1/p\left(\hat{u}_k\right)\right)$, или $-\log p\left(\hat{u}_k\right)$, находим среднюю по всем элементам алфавита количественную меру неопределенности (энтропию):

$$H\left(u\right)=-\sum_{k=1}^{l}p\left(\hat{u}_k\right)\log p\left(\hat{u}_k\right). \tag{1.2}$$

В частном случае независимых и равновероятных элементов алфавита, когда $p\left(\hat{u}_k\right)=\mathrm{const}\left(k\right)=1/l$, выражение (1.2) переходит в (1.1). При этом легко показать, что энтропия $H\left(u\right)$ достигает своего максимального значения именно в этом частном случае, т. е.

$$H_{\max}\left(u\right)=\log l. \tag{1.3}$$

Рассмотрим в самом общем виде структурную схему системы передачи сообщений (рис. 1.1), включающую источник **И**, а также получатель **П** сообщений. Вся аппаратура преобразования, передачи и приема сообщений, а также физическая среда распространения сигналов объединены в блок системы передачи, именуемый каналом.

Рис. 1.1. Обобщенная структурная схема системы передачи сообщений

Передаваемые источником в канал последовательности элементов алфавита $\left\{\hat{u}\right\}$ оказываются у получателя в виде последовательностей тех же элементов, но с возможными ошибками, когда вместо любого переданного элемента $\hat{u}_k$ получатель может принять элемент $\hat{u}_i$ $\left(i\neq k\right)$ из того же ансамбля $\left\{\hat{u}\right\}$.

Для того чтобы отличать принятые, возможно с ошибками, получателем **П** последовательности элементов алфавита источника от последовательностей, сформированных и переданных в канал источником **И**, будем далее обозначать принятые получателем элементы символами $\hat{u}'_k$ как элементы ансамбля $\left\{\hat{u}'\right\}$ в отличие от переданных $\hat{u}_k$ (см. рис. 1.1).

До приема очередного элемента сообщения неопределенность в отношении того, какой элемент будет передан источником **И** в канал, очевидно, равна энтропии $H\left(u\right)$, определяемой выражением (1.2). В рассматриваемой ситуации такую неопределенность можно трактовать как *априорную*.

После приема конкретного элемента сообщения $\hat{u}'_i$ остаточная неопределенность $H_{\hat{u}'_i}\left(u\right)$ может быть представлена в виде:

$$H_{\hat{u}'_i}\left(u\right)=-\sum_{k=1}^{l}p_{\hat{u}'_i}\left(\hat{u}_k\right)\log p_{\hat{u}'_i}\left(\hat{u}_k\right), \tag{1.4}$$

а средняя неопределенность $H_{u'}(u)$:

$$H_{u'}(u)=\sum_{i=1}^{l} p(\hat{u}_i') H_{\hat{u}_i'}(u)=-\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{l} p(\hat{u}_i') p_{\hat{u}_i'}(\hat{u}_k)\log p_{\hat{u}_i'}(\hat{u}_k). \tag{1.5}$$

Здесь $p_{\hat{u}_i'}(\hat{u}_k)$ — условная вероятность того, что переданным элементом сообщения является $\hat{u}_k$ при условии, что принятым элементом оказался $\hat{u}_i$. Эти вероятности легко вычисляются с использованием *формулы Байеса* на основе знания величин $p_{\hat{u}_i}(\hat{u}_k')$ — условных вероятностей принятия решения о приеме элемента $\hat{u}_k$, когда переданным в канал был $\hat{u}_i$.

Выражение (1.5) определяет *условную энтропию* $H_{u'}(u)$, характеризующую остаточную (*апостериорную*) неопределенность в отношении переданного элемента алфавита источника после принятия решения о принятом элементе ансамбля $\{\hat{u}'\}$. При этом $H_{u'}(u)\le H(u)$.

Заметим, что в условиях, когда отсутствуют ошибки в принятии решений, и принятый элемент $\hat{u}_i'$ однозначно определяет то, какой элемент был передан, т. е.

$$p_{\hat{u}_i'}(\hat{u}_k)=\begin{cases}1, & k=i,\\ 0, & k\ne i,\end{cases} \tag{1.6}$$

из (1.4) получаем $H_{\hat{u}_i'}(u)=0$, так что $H_{u'}(u)=0.$ Это естественно, т. к. при условии (1.6) апостериорная неопределенность в отношении переданного элемента алфавита отсутствует.

С другой стороны, в ситуации, когда принятые решения на выходе канала рис. 1.1 никак не связаны с переданными в канал элементами алфавита источника, т. е. когда $p_{\hat{u}_i'}(\hat{u}_k)=p(\hat{u}_k)$, принятие указанных выше решений никаким образом не уменьшает априорную неопределенность $H(u)$. При этом из (1.5) действительно получаем

$$H_{u'}(u)=-\sum_{k=1}^{l} p(\hat{u}_k)\log p(\hat{u}_k)\sum_{i=1}^{l} p(\hat{u}_i')=H(u).$$

Итак,

$$0\le H_{u'}(u)\le H(u). \tag{1.7}$$

Разность

$$I(u,u')=H(u)-H_{u'}(u) \tag{1.8}$$

характеризует ту информацию относительно переданного элемента алфавита источника, которую получают на выходе канала (см. рис. 1.1) после принятия решения о принятом элементе. Поэтому величина $I(u,u')$ называется *количеством ин-*

формации, содержащейся (в среднем) в принятом элементе относительно переданного в схеме рис. 1.1. В частности,

$$I(u,u) = H(u) - H_u(u) = H(u). \tag{1.9}$$

Как видно из (1.9), энтропия алфавита $H(u)$ характеризует информацию, содержащуюся (в среднем) в элементе алфавита источника.

Пусть на передачу одного элемента алфавита тратится в среднем время T. Тогда величина

$$I'(u,u') = \frac{1}{T} I(u,u') \tag{1.10}$$

называется *скоростью передачи информации* по каналу рис. 1.1. При этом величина

$$H'(u) = \frac{1}{T} H(u) \tag{1.11}$$

называется *производительностью* источника дискретных сообщений.

1.2. Избыточность алфавита

В общем случае вероятность генерирования источником данного элемента $\hat{u}_k$ зависит от того, какой (какие) элемент предшествовал рассматриваемому, или, иначе говоря, в каком состоянии находится источник. Тогда, аналогично (1.2), получаем выражение для энтропии алфавита $H_q(u)$ в q-ом состоянии источника (*энтропии состояния*):

$$H_q(u) = -\sum_{k=1}^{l} p_q(\hat{u}_k) \log p_q(\hat{u}_k), \tag{1.12}$$

где $p_q(\hat{u}_k)$ — условная вероятность выбора источником элемента $\hat{u}_k$ в q-ом состоянии.

Усредняя величину $H_q(u)$ в (1.12) по всем возможным состояниям, получаем энтропию алфавита с учетом вероятностных связей между его элементами:

$$H(u) = \sum_q P(q) H_q(u) = -\sum_q \sum_{k=1}^{l} P(q) p_q(\hat{u}_k) \log p_q(\hat{u}_k), \tag{1.13}$$

где $P(q)$ — вероятность q-го состояния источника. В общем случае эта величина оказывается меньше вычисленной по (1.1) или (1.2).

Степень неравномерности распределения вероятностей различных элементов алфавита, а также степень взаимной зависимости элементов, проявляющиеся в уменьшении $H(u)$ в сравнении с максимальным значением $H_{\max}(u) = \log l$, характеризуется *избыточностью алфавита* r_u:

$$r_u = 1 - \frac{H(u)}{H_{\max}(u)} = 1 - \frac{H(u)}{\log l}. \tag{1.14}$$

Часто вместо некоторого исходного алфавита объемом l_1 вводится вторичный алфавит, имеющий объем $l_2 = l_1^n$, каждый элемент которого является комбинацией n элементов исходного алфавита. Такая процедура называется *укрупнением* алфавита и производится, например, путем объединения каждых n последовательно передаваемых элементов сообщения в блоки (комбинации) по n элементов. Каждый из полученных таким образом последовательно передаваемых блоков может интерпретироваться как соответствующий элемент вторичного алфавита. Например, исходный алфавит содержит два элемента $(l_1 = 2)$ — 0 и 1. При $n = 3$ имеем $l_2 = 8$, причем элементами вторичного алфавита являются комбинации: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

В силу принятой в теории информации аксиоматики, энтропия обладает свойством аддитивности, так что энтропия вторичного алфавита $H_2(u)$ равна:

$$H_2(u) = n H_1(u).$$

При этом избыточность r_2 вторичного алфавита:

$$r_2 = 1 - \frac{H_2(u)}{H_{2\max}(u)} = 1 - \frac{nH_1(u)}{\log l_2} = 1 - \frac{nH_1(u)}{n \log l_1} = r_1.$$

Таким образом, *при укрупнении алфавита избыточность не изменяется*. Однако очевидно, вероятности появления элементов вторичного алфавита существенно различаются, если избыточность первичного алфавита отлична от нуля. Так, в частности, среди элементов вторичного алфавита будут комбинации, являющиеся блоками из n одинаковых элементов первичного алфавита. Тем не менее, вероятность появления таких блоков оказывается очень малой. Если в качестве примера рассмотреть русский алфавит $(l_1 = 33)$, то общее число 10-буквенных комбинаций $(n = 10)$ равно $l_2 = 33^{10} \cong 10^{15}$. Однако считается практически достоверным, что в текстах на русском языке любая из встречающихся, например, 10-буквенных комбинаций является одной из приблизительно $3 \cdot 10^4$ комбинаций, откуда видно, что подавляющее число элементов вторичного алфавита имеют в данном случае пренебрежительно малую суммарную вероятность появления в передаваемых сообщениях.

Сохранение в этих условиях неизменной величины избыточности $(r_2 = r_1)$ объясняется, очевидно, тем, что при укрупнении алфавита резко ослабляются вероятностные связи между элементами вторичного, укрупненного алфавита в сравнении с исходным алфавитом. Именно поэтому процедуру укрупнения называют также *декорреляцией* исходного алфавита.

Следует напомнить, что рассмотренная процедура декорреляции имеет место только в случае отличной от нуля избыточности r_1. В противном случае любые

n-разрядные комбинации элементов исходного алфавита не только статистически независимы, но также имеют одинаковые вероятности появления.

1.3. Дискретный канал и его основные характеристики

Рассмотрим более детально структурную схему системы передачи сообщений (см. рис. 1.1). Ранее в этой главе был рассмотрен один из возможных видов преобразования сообщений источника — процедура укрупнения. Наряду с этим в общем случае возможны и широко используются и иные методы преобразования, результатом которых является представление исходных сообщений в виде последовательностей элементов (символов) некоторого вспомогательного, так называемого *канального* алфавита. Процедура преобразования исходного сообщения в последовательность элементов канального алфавита называется *кодированием*, а комплекс устройств, осуществляющих такое преобразование, называется *кодером* **К** (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Дискретный канал

В результате кодирования исходное сообщение, представленное последовательностью элементов алфавита $\{\hat{u}\}$, превращается в последовательность элементов $\hat{y}_k$ $(k = 1, 2, ..., m)$ канального алфавита $\{\hat{y}\}$. Элементы $\hat{y}_k$ часто называют также *кодовыми символами*.

В модуляторе **М** (см. рис. 1.2) в простейшем случае каждому элементу $\hat{y}_k$ ставится во взаимооднозначное соответствие сигнал $s_k(t)$. В среде распространения **СР** происходят искажения переданных сигналов вследствие влияния различного рода помех, так что на выходе демодулятора **ДМ** воспроизводится переданная последовательность элементов канального алфавита $\{\hat{y}\}$ с теми или иными ошибками. Аналогично ансамблю $\{\hat{u}'\}$ будем обозначать принятые элементы канального алфавита символами $\hat{y}'_k$ $(k = 1, 2, ..., m)$ ансамбля $\{\hat{y}'\}$. Наконец, в декодере **ДК** последовательностям принятых элементов $\hat{y}'_k$ ставятся в соответствие последовательности элементов исходного алфавита.

Выделенная пунктиром на рис. 1.2 часть системы передачи дискретных сообщений, на вход которой поступают кодовые символы $\hat{y}_k$, а с выхода снимаются кодовые символы $\hat{y}'_k$, носит название *дискретного канала*.

Основные характеристики дискретного канала:

- *алфавит* $\{\hat{y}\}$ *канальных (кодовых) символов* $\hat{y}_k$ $(k = 1, 2, ..., m)$ (канальный алфавит);
- *скорость передачи канальных символов* v — количество канальных символов, передаваемых в единицу времени; часто используемая единица измерения — 1 Бод (количество символов, переданных за 1 с);
- *вероятность перехода* $p_{\hat{y}_i}(\hat{y}'_j)$ — условная вероятность того, что на выходе дискретного канала появляется символ $\hat{y}_j$, тогда как на вход этого канала поступил символ $\hat{y}_i$;
- *пропускная способность* C — максимальное количество информации, которое может быть передано по каналу в единицу времени (измеряется в битах в секунду — бит/с). При этом максимум определяется по всем возможным источникам информации и правилам кодирования при фиксированных значениях v и m.

Если вероятность $p_{\hat{y}_i}(\hat{y}'_j)$ не зависит от времени, то канал называется *однородным* (в противном случае *неоднородным*).

Если для любой пары $i \neq j$ вероятности $p_{\hat{y}_i}(\hat{y}'_j) = \mathrm{const}(i, j) = p_0$, то такой канал называется *симметричным (дискретный симметричный канал — ДСК)*. В случае $m = 2$ часто используется английский термин *Binary Symmetric Channel, BSC*.

1.4. Дискретный канал без шума

1.4.1. Пропускная способность

Рассмотрим однородный симметричный канал с вероятностями переходов, равными:

$$p_{\hat{y}_i}(\hat{y}'_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m). \end{cases} \tag{1.15}$$

Такой канал имеет название *дискретного канала без шума*.

Определим пропускную способность C_0 дискретного канала без шума. Имеем:

$$C_0 = \max v \cdot I(y, y'), \tag{1.16}$$

где $I(y, y')$ — количество информации, содержащейся в принятом канальном символе (символе на выходе дискретного канала) относительно символа, переданного в канал, а максимум определяется по всем возможным источникам сообщений и правилам кодирования.

Из (1.16) в соответствии с (1.8) получаем:

$$C_0 = v \cdot \max I(y, y') = v \cdot \max\left[H(y) - H_{y'}(y)\right], \tag{1.17}$$

где $H(y)$ и $H_{y'}(y)$ — соответственно энтропия и условная энтропия канального алфавита.

При выполнении (1.15) очевидно, условная энтропия как мера остаточной (апостериорной) неопределенности оказывается равной нулю, так что из (1.17) с учетом (1.3) получаем:

$$C_0 = v \cdot \max H(y) = v \cdot \log m. \tag{1.18}$$

Зная пропускную способность канала, можно оценить и максимальное значение скорости W (букв/с), с которой могут быть переданы по такому каналу сообщения источника, алфавит которого имеет энтропию $H(u)$.

1.4.2. Кодирование источника

Максимальное значение скорости передачи W определяет следующая **теорема кодирования для дискретного канала без шума**.

Сообщения источника, алфавит которого имеет энтропию $H(u)$*, могут быть переданы сколь угодно точно по дискретному каналу без шума со средней скоростью* $W = \dfrac{C_0}{H(u)} - \varepsilon$*, где* ε *— сколь угодно малая положительная величина.*

Таким образом, скорость передачи W не превосходит величины:

$$W_{\max} = \frac{C_0}{H(u)}. \tag{1.19}$$

Следует заметить, что $H(u)$ в (1.19) является энтропией, учитывающей как неравномерность распределения вероятностей элементов (букв) алфавита источника, так и вероятностные связи между этими элементами.

Приближение величины W к предельному значению $W_{\max}$ возможно путем использования соответствующих методов кодирования. Рассмотрим основной принцип такого кодирования, называемый *кодированием источника.*

В большинстве представляющих практический интерес случаев выполняется условие:

$$m < l. \tag{1.20}$$

Поставим в соответствие каждому элементу алфавита источника определенную n-разрядную комбинацию элементов канального алфавита (комбинацию *длиной* n), так чтобы $l = m^n$. При этом, очевидно, m^n — число всех возможных n-разрядных комбинаций канального алфавита, имеющего объем m (например, $m = 2$). При этом получаем:

$$W = \frac{v}{n} = \frac{v \cdot \log m}{n \cdot \log m} = \frac{C_0}{\log m^n} = \frac{C_0}{H_{\max}(u)}. \tag{1.21}$$

Сравнивая (1.21) с (1.20), убеждаемся, что при рассмотренном методе кодирования в общем случае, когда $H(u) < H_{\max}(u)$, полученная скорость передачи элементов алфавита источника может оказаться существенно меньше величины $W_{\max}$ в (1.19).

Каким же образом можно приблизиться к величине $W_{\max}$? Очевидно, что при фиксированном значении v увеличение значения W может быть достигнуто лишь путем уменьшения длины комбинации n, что, разумеется, невозможно при использовании рассмотренного ранее метода *равномерного* кодирования, когда все комбинации канальных символов имеют одну и ту же длину n.

Увеличение значения W возможно лишь путем перехода к *неравномерному* кодированию, когда длины комбинаций канальных элементов различны, так что средняя длина $n_{\text{ср}}$ может оказаться меньше величины n в (1.21), где

$$n_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^{l} p(\hat{u}_k) \cdot n_k$$

и n_k — длина k-ой комбинации. При этом скорость передачи W определяется выражением

$$W = \frac{v}{n_{\text{ср}}}. \tag{1.22}$$

Заметим, что из условия однозначного декодирования должно выполняться соотношение:

$$n_{\text{ср}} H(y) = H(u), \tag{1.23}$$

где $H(y)$ — энтропия канального алфавита. Тогда, с учетом (1.18) и (1.23),

$$W = \frac{v}{n_{\text{ср}}} = \frac{C_0}{\log m} \cdot \frac{H(y)}{H(u)} = W_{\max} \cdot \frac{H(y)}{H_{\max}(y)}. \tag{1.24}$$

Как видно из (1.24), уменьшение $n_{\text{ср}}$ связано с уменьшением избыточности канального алфавита, когда величина $H(y)$ приближается к $H_{\max}(y)$.

Рассмотрим методы уменьшения избыточности канального алфавита. Как следует из изложенного ранее, возможны два случая:

- статистические связи между элементами алфавита источника отсутствуют, так что его избыточность вызвана лишь различием в вероятностях появления элементов алфавита;
- имеются также и статистические связи между элементами алфавита источника.

В первом случае путь уменьшения избыточности заключается, как уже отмечалось ранее, в применении неравномерного кодирования источника с целью уменьшения величины $n_{\text{ср}}$. При этом основной принцип кодирования заключается в том, что наиболее часто встречающиеся элементы алфавита источника кодируются наиболее короткими комбинациями элементов канального алфавита.

При использовании неравномерного кодирования возникает проблема разделения комбинаций при приеме для обеспечения однозначного декодирования. Достаточным условием такого разделения является выполнение так называемого *условия неприводимости*, когда ни одна кодовая комбинация не является одновременно началом какой-либо другой из используемых кодовых комбинаций. Так, например, не является неприводимым двоичный код, содержащий комбинации 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010. В то же время код, содержащий комбинации 00, 01, 100, 101, 110, 111, удовлетворяет условию неприводимости.

Неприводимый код, минимизирующий среднюю длину $n_{\text{ср}}$ кодовой комбинации, т. е. предельно уменьшающий избыточность канального алфавита, называется *оптимальным неравномерным кодом.* Известны различные правила (алгоритмы) построения таких кодов (например, коды *Хафмена*, *Шеннона — Фэно* и др.).

В случае наличия статистических связей между элементами алфавита источника также целесообразно использовать оптимальный неравномерный код, однако предварительно необходимо устранить (или существенно ослабить) эти статистические связи, что можно обеспечить, например, путем укрупнения алфавита.

Следует заметить, что рассмотренное устранение избыточности исходных сообщений неизбежно связано с риском снижения достоверности передачи. Однако в рамках выполнения условий (1.15), справедливых для канала без шума, это обстоятельство может не учитываться. В то же время, как далее будет показано, и в каналах с шумом кодирование источника, приводящее к устранению избыточности исходных сообщений, может быть использовано, но лишь как предварительный этап кодирования сообщений. Поэтому далее (в последующих разделах) будем рассматривать лишь двоичные источники с алфавитом без избыточности, полагая, что при необходимости избыточность исходных сообщений легко может быть устранена.

1.5. Дискретный канал с шумом

Рассмотрим однородный симметричный дискретный канал с вероятностями переходов:

$$p_{\hat{y}_i}\left(\hat{y}'_j\right) = \text{const}\left(i, j\right) = p_0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{1.25}$$

Такой канал называется *дискретным каналом с шумом.*

Заметим, что условная вероятность $p_{\hat{y}_i}\left(\hat{y}'_j\right)$ в (1.25) определяет вероятность *конкретной* ошибки (ошибочной регистрации символа $\hat{y}_j$, когда был передан $\hat{y}_i$). Вероятность же p_i *любой* ошибки при передаче символа $\hat{y}_i$ равна:

$$\begin{aligned} p_i &= P\left\{\hat{y}_i \to \hat{y}'_1 \ \text{ или } \ \hat{y}_i \to \hat{y}'_3, \ \ldots, \text{ или } \ \hat{y}_i \to \hat{y}'_m, \text{ кроме } \hat{y}_i \to \hat{y}'_i\right\} = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{m} p_{\hat{y}_i}\left(\hat{y}_j\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{m} p_0 = \left(m-1\right) p_0 = p, \end{aligned} \tag{1.26}$$

где $P\{A\}$ — вероятность события A.

Найдем пропускную способность $C_{\text{ш}}$ однородного симметричного дискретного канала с шумом. По определению:

$$C_{\text{ш}} = \max\left\{v \cdot I\left(y, y'\right)\right\} = v \cdot \max\left\{H\left(y\right) - H_{y'}\left(y\right)\right\}. \tag{1.27}$$

Поскольку из теории информации известно, что $I\left(y', y\right) = I\left(y, y'\right)$, имеем из (1.27):

$$C_{\text{ш}} = v \cdot \max\left\{H\left(y'\right) - H_{y}\left(y'\right)\right\},$$

или, с учетом (1.5),

$$C_{\text{ш}} = v \cdot \max\left\{H\left(y'\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p\left(\hat{y}_i\right) p_{\hat{y}_i}\left(\hat{y}'_j\right)\log p_{\hat{y}_i}\left(\hat{y}'_j\right)\right\} =$$

$$= v \cdot \max\left\{H\left(y'\right) + \sum_{i=1}^{m} p\left(\hat{y}_i\right)\left(1-p\right)\log\left(1-p\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \underset{\left(i \neq j\right)}{p\left(\hat{y}_i\right)} p_0 \log p_0\right\} =$$

$$= v \cdot \max H\left(y'\right) + v \cdot \left[\left(1-p\right)\log\left(1-p\right) + \left(m-1\right) p_0 \log p_0\right].$$

Тогда, с учетом (1.3) и (1.26),

$$C_{\text{ш}} = v\left[\log m + \left(1-p\right)\log\left(1-p\right) + p\log\frac{p}{m-1}\right]. \tag{1.28}$$

В случае $p = \left(m-1\right)/m$ из (1.28) имеем:

$$C_{\text{ш}} = v\left[\log m + \frac{1}{m}\log\frac{1}{m} + \log\frac{1}{m} - \frac{1}{m}\log\frac{1}{m}\right] = 0.$$

В частности, для двоичного канала $\left(m = 2\right)$ и $p = 0{,}5$ имеем $C_{\text{ш}} = 0$.

Сравним полученное выражение (1.28) с выражением для величины C_0 в (1.18). Поскольку $\log\left(1-p\right) < 0$ и $\log\dfrac{p}{m-1} < 0$, то $C_{\text{ш}} < C_0$.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли так закодировать сообщение, чтобы передавать его по каналу с шумом, если не с нулевой, то хотя бы с достаточно малой вероятностью ошибок декодирования при конечной скорости W передачи элементов алфавита источника? Ответ на этот вопрос дает следующая **теорема кодирования для дискретного канала с шумом**.

Для источника с производительностью $H'\left(u\right)$, меньшей величины $C_{\text{ш}}$, существует хотя бы один способ кодирования, при котором вероятность ошибочного декодирования может быть сколь угодно малой. Если же $H'\left(u\right) > C_{\text{ш}}$, то таких способов не существует.

Заметим, прежде всего, что полученное ранее неравенство $C_{\text{ш}} < C_0$ означает, что при фиксированной скорости передачи символов канального алфавита v для передачи одного и того же количества информации в канале с шумом потребуется затратить большее число канальных символов, чем в канале без шума. Действительно, рассмотрим типичный случай двоичных алфавита источника и канального алфавита. Пусть $T_b = 1/W$ — время, затрачиваемое на передачу одного двоичного символа алфавита источника («длительность» символа источника); $T_c = 1/v$ — время, затрачиваемое на передачу одного канального (кодового) двоичного символа («длительность» кодового символа). Для двоичного источника с алфавитом без избыточности из (1.11) имеем $H'(u) = 1/T_b$. Тогда, с учетом (1.28), пропускная способность дискретного двоичного однородного канала с шумом может быть представлена в виде:

$$C_{\text{ш}} = \frac{1 - H_b(p)}{T_c}, \tag{1.28а}$$

где

$$H_b(x) = -(1-x)\log_2(1-x) - x\log_2(x) \tag{1.28б}$$

— функция, часто называемая *функцией Шеннона* (*энтропии двоичного источника*), рис. 1.3.

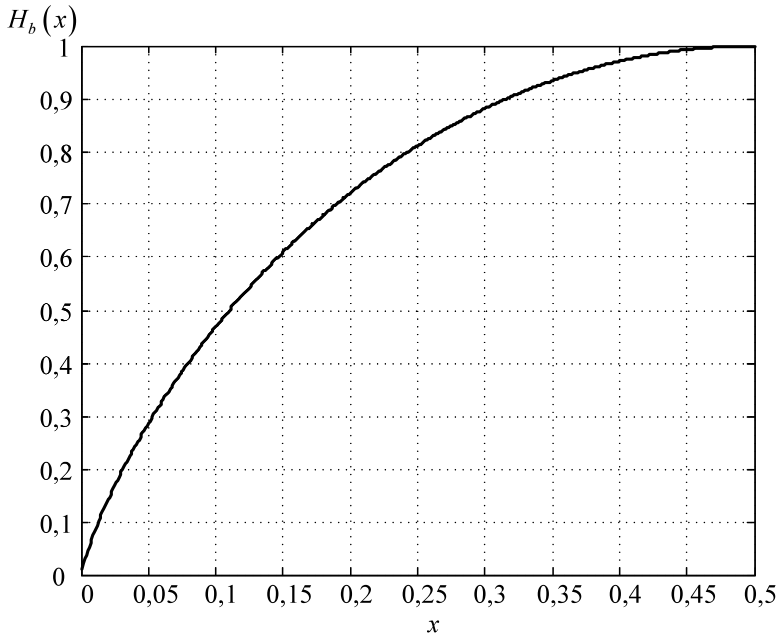


Рис. 1.3. Функция энтропии двоичного источника

С учетом (1.28а) следующее из теоремы кодирования для дискретного канала с шумом условие достижения сколь угодно малого значения вероятности ошибочного декодирования приобретает вид:

$$\frac{T_c}{T_b} < 1 - H_b(p). \tag{1.28в}$$

Это условие означает, что скорость v поступления кодовых символов в канал должна быть выше скорости поступления символов исходного сообщения в кодер. Таким образом, на один бит исходного сообщения кодер в среднем должен сформировать $T_b/T_c > 1$ двоичных кодовых символов. По сути, это означает необходимость *введения кодером избыточности* в исходное сообщение в реальном времени. Такое преобразование сообщений кодером, предполагающее введение избыточности в исходное сообщение, является главным принципом *помехоустойчивого канального* кодирования.

Заметим, что в общем случае алфавит источника сам по себе может содержать избыточность. Однако использование такой избыточности обычно оказывается трудным, так что целесообразно эту избыточность, содержащуюся в таком случае в исходных сообщениях, предварительно устранить. Для этого могут быть использованы рассмотренные ранее методы кодирования источника, после чего кодирующее устройство вводит тот вид избыточности, который оказывается возможным использовать при процедуре декодирования с целью уменьшения вероятности ошибочного приема сообщения.

Разумеется, не любой вид «полезной» избыточности, введенной в передаваемые сообщения при кодировании, приводит к увеличению скорости передачи информации. Рассмотрим один тривиальный пример. Пусть каждый подлежащий передаче элемент (буква) исходного сообщения повторяется несколько раз, причем в декодере решение принимается *мажоритарным* методом, т. е. в пользу того элемента, который при приеме был зарегистрирован наибольшее число раз. Очевидно, увеличивая количество повторений, можно сколь угодно снизить вероятность ошибочного приема элемента исходного сообщения (ошибочного декодирования) при фиксированном значении вероятности перехода (1.25). (Напомним, что характеристика (1.25) относится к дискретному каналу, не включающему в себя кодер и декодер.) Однако такой метод введения избыточности потребовал бы существенного (в пределе — бесконечного) уменьшения скорости передачи исходных сообщений.

К сожалению, теорема кодирования для дискретного канала с шумом не указывает конкретного способа кодирования. Можно лишь отметить, что приближение скорости передачи информации к значению $C_{\text{ш}}$ связано с увеличением длины кодовых комбинаций и, как следствие, усложнением методов кодирования и декодирования.

1.6. Непрерывный канал

1.6.1. Модель непрерывного канала. Дифференциальная энтропия

Вернемся к рассмотрению обобщенной структурной схемы системы передачи дискретных сообщений, изображенной на рис. 1.2. Выделим ту часть схемы, на вход которой поступают сигналы $s_r(t)$, являющиеся элементами множества $\{s\}$, а с выхода снимаются сигналы $x(t)$ (элементы множества $\{x\}$), являющиеся реализациями случайного процесса $\xi(t)$, представляющего собой сумму сигналов $s_r(t)$ на выходе физического канала распространения и реализаций $n(t)$ случайного процесса $\nu(t)$, представляющего аддитивную помеху в среде распространения (рис. 1.4). Таким образом,

$$\xi(t) = s_r(t) + \nu(t); \qquad x(t) = s_r(t) + n(t). \tag{1.29}$$

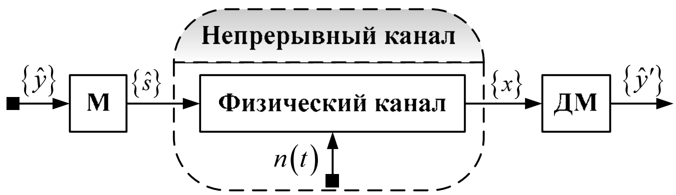


Рис. 1.4. Непрерывный канал

Выделенная на рис. 1.4 пунктиром часть схемы называется *непрерывным каналом* и включает в себя устройства излучения, приема и усиления радиосигналов, а также физическую среду распространения радиосигналов с имеющимися в ней помехами радиоприему.

Аналогично тому, как это делалось при анализе дискретных каналов, можно сформулировать основные положения теории информации применительно также и к непрерывному каналу. С этой целью рассмотрим прежде всего понятие энтропии применительно к непрерывной случайной величине u, характеризуемой плотностью вероятностей $w_u(x)$. Разобьем область возможных значений $(-\infty, \infty)$ этой случайной величины на отрезки величиной $\Delta x_i = \delta$ и будем воспроизводить величину u с точностью $\pm\delta/2$. При малых значениях δ, очевидно, вероятность попадания величины u в область вблизи значения x_k приблизительно равна $w_u(x_k)\delta$. Тогда, в соответствии с (1.2), энтропию рассматриваемой величины u можно определить как

$$H^{(\delta)}(u) = -\sum_k w_u(x_k) \cdot \delta \log\left[w_u(x_k) \cdot \delta\right],$$

или, при стремлении величины δ к нулю,

$$H^{(\delta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} w_u(x) \log w_u(x)\, dx - \log\delta. \tag{1.30}$$

Выражение

$$h(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} w_u(x) \log w_u(x)\, dx \tag{1.31}$$

в (1.30) имеет название *дифференциальной энтропии* непрерывной случайной величины u, а сама величина $H^{(\delta)}(u)$ при стремлении δ к нулю неограниченно возрастает вследствие возрастания слагаемого $-\log\delta$ в (1.30). Этот результат не является неожиданным, если вспомнить, что величина $H^{(\delta)}(u)$ равна тому количеству информации, которое заключается в значении величины u, определенном с точностью до $\pm\delta/2$.

Аналогично можно ввести в рассмотрение условную энтропию $H_{u'}^{(\delta)}(u)$, характеризующую среднюю остаточную неопределенность в отношении значения u при известном значении величины u', в общем случае статистически связанной с величиной u, при заданной точности $\pm\Delta x/2$ и $\pm\Delta y/2$ определения u и u' соответственно:

$$H_{u'}^{(\delta)}(u) = -\sum_i \sum_k w_{u'}(y_i)\Delta y\, w_u(x_k/y_i)\Delta x \log\left[w_u(x_k/y_i)\Delta x\right], \tag{1.32}$$

где $w_{u'}(y)$ — плотность вероятностей величины u'; $w_u(x/y)$ — условная плотность вероятностей величины u, зависящей от величины u'.

При стремлении $\Delta x = \delta$ и Δy к нулю имеем из (1.32):

$$H_{u'}^{(\delta)}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{u'}(y) w_u(x/y) \log w_u(x/y)\, dxdy - \log\delta, \tag{1.33}$$

где выражение

$$h_{u'}(u) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{u'}(y) w_u(x/y) \log w_u(x/y)\, dxdy \tag{1.34}$$

называется *дифференциальной условной энтропией* непрерывной случайной величины u, зависящей от u'.

Тогда, по аналогии с (1.8), разность $H^{(\delta)}(u) - H_{u'}^{(\delta)}(u)$ при стремлении δ к нулю, имеющая вид

$$I(u,u') = h(u) - h_{u'}(u), \tag{1.35}$$

представляет собой количество информации, содержащееся в среднем значении u' относительно величины u.

1.6.2. Пропускная способность непрерывного канала с аддитивным гауссовым шумом, имеющим равномерный спектр в ограниченной полосе

Воспользуемся полученным выражением (1.35) для нахождения пропускной способности непрерывного канала (см. рис. 1.4). В качестве модели непрерывного