

А. А. Болибрух

**Обратные задачи монодромии
в аналитической теории
дифференциальных уравнений**

МЦНМО

УДК 517.927.7

ББК 22.161.6

Б79

Болибрух А. А.

Обратные задачи монодромии в аналитической теории
дифференциальных уравнений / Под ред. Д. В. Аносова, В. П. Лексина
Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2018.

220 с.

ISBN 978-5-4439-2640-7

В лекциях начала аналитической теории дифференциальных уравнений излагаются с точки зрения расслоений с мероморфными связностями на римановой сфере. Этот подход позволяет добиться значительного прогресса в решении таких знаменитых старых задач, как проблема Римана—Гильберта и задача о биркгофовой стандартной форме, а также в исследовании изомонодромных деформаций фуксовых систем.

Лекции, начинающиеся с основ теории и требующие от читателя знакомства лишь со стандартными курсами обыкновенных дифференциальных уравнений и комплексного анализа, выводят его на передний край этой бурно развивающейся в последнее время области математики, имеющей важные приложения к задачам математической физики.

Подготовлено на основе книги:

Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений / Под ред. Д. В. Аносова, В. П. Лексина. — М.: МЦНМО, 2009.— 220 с. — ISBN 978-5-94057-510-8

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.

<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2640-7

© Наследники, 2018.

© МЦНМО, 2018.

ЛЕКЦИЯ 1

Понятие главного расслоения. Примеры

Понятие расслоения находится примерно в таком же отношении к понятию прямого произведения, как понятие многообразия к евклидову пространству: и многообразие, и расслоение конструируются из отдельных кирпичиков, в первом случае — из шаров евклидова пространства, во втором — из декартовых произведений окрестностей точек многообразия на стандартный слой.

Прежде чем дать инвариантное (бескоординатное) определение расслоения, напомним некоторые необходимые для дальнейшего определения.

Определение 1.1. *Группой Ли* G называется многообразие G , являющееся группой и такое, что групповые операции

- 1) $G \times G \rightarrow G \ ((g, h) \mapsto gh)$;
- 2) $G \rightarrow G \ (g \mapsto g^{-1})$

являются непрерывными (гладкими, аналитическими и т. д.) отображениями многообразий.

Пример 1.1. Примерами групп Ли являются:

- 1) группа $\mathbb{R}$ (группа действительных чисел) по сложению;
- 2) окружность S^1 , рассматриваемая как множество комплексных чисел, модуль которых равен единице; групповая операция в этом случае — умножение комплексных чисел;
- 3) группа $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ по умножению (пример дискретной группы Ли);
- 4) общая линейная группа над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) — $GL(p, \mathbb{R})$ ($GL(p, \mathbb{C})$) — группа невырожденных действительных (комплексных) матриц размера $p \times p$ по умножению.

Определение 1.2. *Непрерывным (гладким, аналитическим и т. д.) действием группы Ли* G на многообразии X справа называется непрерывное (гладкое, аналитическое и т. д.) отображение

$$X \times G \rightarrow X \quad ((x, g) \mapsto xg)$$

такое, что

- 1) $\forall x \in X \ \forall g, h \in G: x(gh) = (xg)h$;
- 2) $\forall x \in X: xe = x$.

Аналогичным образом определяется левое действие G на X .

Пример 1.2. Примерами действия групп являются следующие:

1) группа G действует справа на многообразии $X \times G$ по правилу $(x, g)h = (x, gh)$;

2) группа $\mathbb{Z}_2$ из п. 3 примера 1.1 действует на многообразии S^1 из п. 2 примера 1.1 (обычным умножением комплексных чисел);

3) группа $GL(p, \mathbb{R})$ ($GL(p, \mathbb{C})$) действует слева на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$ ($\mathbb{C}^p$) (умножением матрицы на вектор).

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы дать определение главного расслоения.

Определение 1.3. Главным расслоением P со структурной группой G называется четверка $P = (P_E, B, \pi, G)$, где:

1) P_E, B — многообразия, G — группа Ли, действующая справа на P_E , $\pi: P_E \rightarrow B$ — сюръективное отображение;

2) для любого $x \in B$ существует окрестность $U \subset B$ точки x и гомеоморфизм $f_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f_U} & U \times G \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr} & \\ & U & \end{array} \quad (1.1)$$

коммутативна (см. рис. 1) и

$$f_U(\tilde{x}g) = f_U(\tilde{x})g \quad (\text{эквивариантность } f_U)$$

для любых $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U)$, $g \in G$.

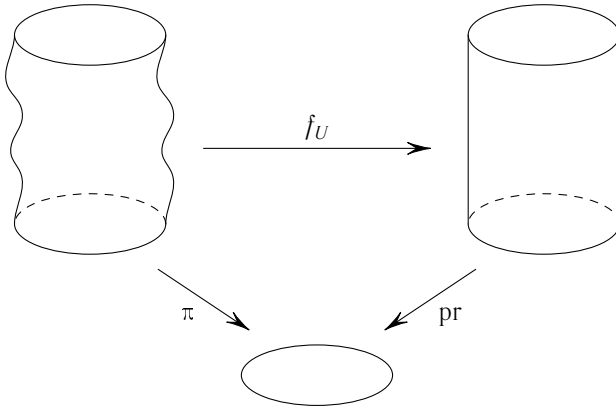


Рис. 1

Пространство P_E называется *тотальным пространством расслоения*, B — *базой расслоения*, π — *проекцией*, $\pi^{-1}(x) \cong G$ — *слоем расслоения*. Свойство 2 означает, что расслоение P *локально тривиально* (устроено как «простое» прямое произведение над U).

Если все многообразия¹ и отображения, участвующие в определении расслоения, непрерывны (гладкие, аналитические и т. д.), то говорят о *топологическом (гладком, аналитическом и т. д.) расслоении P* .

Простейшим примером главного расслоения является прямое произведение.

Пример 1.3. Рассмотрим

$$P = (B \times G, B, \text{rg}, G),$$

где действие G на $B \times G$ определяется как в п. 1 примера 1.2, а через rg обозначена проекция на первый сомножитель. Очевидно, что все условия определения 1.3 выполнены.

Приведем пример «нетривиального» главного расслоения.

Пример 1.4. Следующее расслоение: $P = (S^1, S^1, \pi, \mathbb{Z}_2)$, где $\pi(z) = z^2$, а группа $\mathbb{Z}_2$ действует на S^1 так же, как в п. 2 примера 1.2, является «нетривиальным» (пространство расслоения S^1 не гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times \mathbb{Z}_2$, так как последнее пространство несвязно).

Следующее расслоение хорошо известно в топологии. Оно называется расслоением Хопфа.

Пример 1.5. Рассмотрим расслоение $P = (S^3, S^2, \pi, S^1)$, где сфера S^3 реализована как подмножество точек (z_1, z_2) пространства $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющих условию $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, сфера $S^2 = \mathbb{C}$ — как множество комплексных прямых пространства $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат (в этом случае каждой точке сферы ставится в соответствие число $z_1 : z_2$, где, в свою очередь, (z_1, z_2) — направляющий вектор прямой), а отображение π задано соотношением $\pi(z_1, z_2) = z_1 : z_2$. Нетрудно видеть, что прообраз каждой точки гомеоморфен окружности, так как если $\pi(z'_1, z'_2) = \pi(z_1, z_2)$, то $z'_1 = tz_1$, $z'_2 = tz_2$ и $|t|^2 = 1$, то есть $t \in S^1$. Докажите самостоятельно, что P действительно является главным аналитическим расслоением со структурной группой S^1 .

Какие главные расслоения считать эквивалентными? Ответ на этот вопрос дает следующее определение.

¹ При некоторой модификации определения топологического главного расслоения не требуется, чтобы P_E было многообразием. Такой вариант (который как раз и излагается во многих учебниках) используется как в самой топологии, так и кое-где за ее пределами, но для целей настоящей книги достаточно более ограничительного варианта, приведенного в основном тексте. — *Прим. ред.*

Определение 1.4. Два главных расслоения P и $P' = (P'_E, B, \pi', G)$ называются *эквивалентными*, если существует такой эквивариантный гомеоморфизм f между P_E и P'_E , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_E & \xrightarrow{f} & P'_E \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array} \quad (1.2)$$

коммутативна. (Если речь идет об эквивалентности гладких, аналитических и т. д. расслоений, то требуется, чтобы отображение f было диффеоморфизмом, биголоморфным и т. д. отображением.)

Главное расслоение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению.

Отметим здесь, что коммутативность диаграммы (1.2) означает, что отображение f переводит слой $\pi^{-1}(x)$ расслоения P над точкой x в слой $(\pi')^{-1}(x)$ расслоения P' над той же точкой.

Перейдем теперь к координатному описанию главного расслоения. Рассмотрим покрытие $\{U_i\}$ базы B такое, что над каждым U_i расслоение P тривиально, и рассмотрим локальные тривиализации (1.1) расслоения P над этими окрестностями (т. е. зафиксируем гомеоморфизмы f_{U_i} , которые мы будем обозначать через f_i). Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} (U_i \cap U_j) \times G & \xleftarrow{f_i} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{f_j} & (U_i \cup U_j) \times G \\ & \searrow \text{pr} & \downarrow \pi & \swarrow \text{pr} & \\ & & U_i \cap U_j & & \end{array} \quad (1.3)$$

Отображение

$$f_j \circ (f_i)^{-1}: (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_i \cap U_j) \times G \quad (1.4)$$

переводит точку (x, e) в $(x, g^*(x))$. Из эквивариантности этого отображения следует, что для любых $x \in B, g \in G$ имеет место соотношение

$$(x, g) = (x, e)g \mapsto (x, g^*(x))g = (x, g^*(x)g).$$

Обозначим $g^*(x)$ через $g_{ji}(x)$. Итак, мы доказали, что

$$f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g) \equiv (x, g_{ji}(x)g), \quad \text{где } g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow G. \quad (1.5)$$

Из конструкции этого отображения легко следует, что $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$ для любого $x \in U_i \cap U_j$ (здесь через g^{-1} обозначается элемент группы G ,

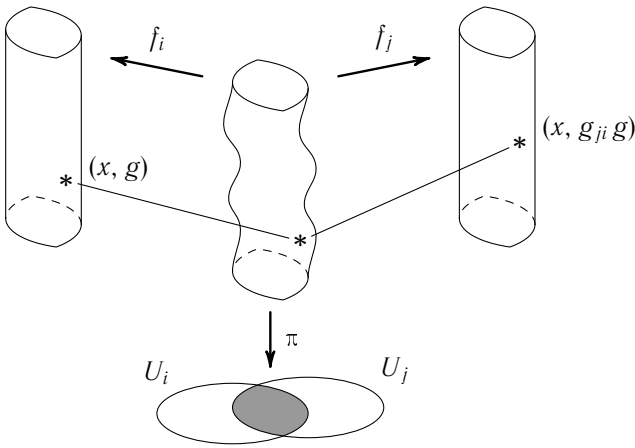


Рис. 2

обратный к g), так как $f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_j)^{-1} = \text{id}$. Действительно,

$$(x, g) = f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_j)^{-1}(x, g) = f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g_{ij}g) = (x, g_{ji}g_{ij}g)$$

для любого g , откуда получаем $g_{ji}(x)g_{ij}(x) \equiv e$.

Если три окрестности U_i, U_j, U_k имеют непустое пересечение, то, рассматривая для каждой пары из них диаграммы типа (1.3), с учетом тождества $f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1} \circ f_k \circ (f_j)^{-1} = \text{id}$ получаем $g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv e$. Действительно,

$$\begin{aligned} (x, g) &= f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1} \circ f_k \circ (f_j)^{-1}(x, g) = \\ &= f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1}(x, g_{kj}g) = f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g_{ik}g_{kj}g) = \\ &= (x, g_{ji}g_{ik}g_{kj}g), \end{aligned}$$

откуда и следует указанное тождество.

Итак, мы доказали первую часть следующей леммы.

Лемма 1.1. По главному расслоению P , покрытию $\{U_i\}$ и фиксированным тривиализациям $\{f_i\}$ расслоения P над $\{U_i\}$ можно построить набор отображений (1.5), обладающих следующими свойствами:

$$g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \quad g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv e. \quad (1.6)$$

И обратно, по любому покрытию $\{U_i\}$ многообразия B и по любому набору отображений (1.5), обладающих свойствами (1.6), можно построить главное расслоение $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_E, B, \pi', G)$. Если набор

отображений $\{g_{ji}\}$ был построен по главному расслоению P , то расслоение $\tilde{Q}$ будет эквивалентно расслоению P .

Доказательство. Докажем вторую часть леммы. Рассмотрим несвязное объединение $Q = \bigsqcup_i (U_i \times G)$ и введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности $\sim$: если $x \in U_i \cap U_j$, то

$$\begin{aligned} (x, g) &\sim (x, g_{ji}(x)g) && \text{для } (x, g) \in (U_i \times G), (x, g_{ji}(x)g) \in (U_j \times G), \\ (x, g) &\sim (x, g) && \text{для любых } x \in U_i, g \in G. \end{aligned}$$

Из свойств (1.6) следует, что это действительно отношение эквивалентности.

Обозначим через $\tilde{Q}_E$ многообразие $Q/\sim$, а через $\langle x, g \rangle$ — точку $\tilde{Q}_E$ (класс эквивалентности пары (x, g)). Определим действие группы G на $\tilde{Q}_E$ формулой $\langle x, g \rangle h = \langle x, gh \rangle$, а отображение $\tilde{\pi}: \tilde{Q}_E \rightarrow B$ — соотношением $\tilde{\pi}(\langle x, g \rangle) = x$. Читателю предоставляется проверить, что так построенная четверка $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_E, B, \tilde{\pi}, G)$ действительно является главным расслоением со структурной группой G .

Если отображения (1.5) построены по расслоению P с фиксированными локальными тривиализациями $\{f_i\}$, то эквивалентность расслоений P и $\tilde{Q}$ устанавливается с помощью гомеоморфизма $f: \tilde{Q}_E \rightarrow P_E$, где f совпадает с f_i^{-1} на $U_i \times G$. Покажем, что это отображение корректно определено. Для этого надо убедиться в том, что отображения f_i^{-1} и f_j^{-1} совпадают на общей области определения. Действительно, если $x \in U_i \cap U_j$, $(x, g) \in U_i \times G$, то по построению (x, g) и $(x, g_{ji}g)$ определяют одну и ту же точку $\langle x, g \rangle \in \tilde{Q}_E$ и согласно (1.4)

$$f_i^{-1}(x, g) = f_j^{-1} \circ f_j \circ f_i^{-1}(x, g) = f_j^{-1}(x, g_{ji}g).$$

Эквивариантность отображения f и коммутативность диаграммы (1.2) немедленно следуют из построения. $\square$

Набор отображений $\{g_{ji}\}$ называется *склеивающим коциклом* расслоения P . Действительно, с помощью этого набора расслоение P «склеивается» из стандартных кирпичиков $U_i \times G$. Функции $\{g_{ji}\}$ называются также *функциями перехода*.

В качестве примера изучим координатное описание расслоений из примеров 1.3, 1.5.

Пример 1.6. Для произвольного покрытия $\{U_i\}$ базы B расслоения P примера 1.3 (пример расслоения, являющегося прямым произведением) в качестве тривиализирующих отображений естественно выбрать $f_i = \text{id}$; поэтому соответствующий склеивающий коцикл будет иметь вид $g_{ji}(x) \equiv e$.

В случае расслоения Хопфа рассмотрим на базе $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$ две координаты: $z = z_2/z_1$ при $z_1 \neq 0$ (координата «окрестности нуля») и $t = z_1/z_2$ при $z_2 \neq 0$ (координата «окрестности бесконечности»). Рассмотрим покрытие сферы S^2 (или, что то же самое, покрытие расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$) двумя окрестностями $U_0 = \{z \mid z \in \mathbb{C}\}$ и $U_\infty = \{t \mid t \in \mathbb{C}\}$. Тривиализации расслоения Хопфа над этими окрестностями задаются соответственно отображениями $f_0: (z_1, z_2) \mapsto (z, \exp(i \arg z_1))$ и $f_\infty: (z_1, z_2) \mapsto (t, \exp(i \arg z_2))$. Координаты t и z точки из $U_0 \cap U_\infty$ связаны соотношением $t = 1/z$, поэтому отображение $f_\infty \circ f_0^{-1}$, записанное в координате z , переводит точку $(z, \exp(i \arg z_1))$ в точку $(z, \exp(i \arg z_2))$. Поскольку

$$\exp(i \arg z_2) = \exp(i \arg z z_1) = \exp(i \arg z) \exp(i \arg z_1),$$

то $g_{\infty 0}(z) = \exp(i \arg z)$.

Итак, окончательно, расслоение Хопфа имеет следующее координатное описание:

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{\infty 0}(z) = \exp(i \arg z), \quad g_{\infty 0}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1.$$

Замечание 1.1. Расслоение Хопфа получается из расслоения $\mathcal{O}^*(-1)$, имеющего координатное описание

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{\infty 0}(z) = z, \quad g_{\infty 0}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

«редукцией» $z \mapsto \exp(i \arg z)$ структурной группы $\mathbb{C}^*$ к S^1 .

Склеивающий коцикл определяется расслоением не однозначно. Он зависит от выбора покрытия и от выбора локальных тривиализаций $\{f_i\}$. Рассмотрим подробнее последнюю зависимость. Пусть f_U, f'_U — различные тривиализации расслоения P над U . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} U \times G & \xleftarrow{f'_U} & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f_U} & U \times G \\ & \searrow \text{pr} & \downarrow \pi & \swarrow \text{pr} & \\ & & U & & \end{array} \quad (1.7)$$

Отображение

$$f_U \circ (f'_U)^{-1}: U \times G \rightarrow U \times G \quad (1.8)$$

переводит точку (x, e) в $(x, h_U(x))$. Из эквивариантности этого отображения следует, что для любых $x \in U$, $g \in G$ имеет место соотношение

$$(x, g) = (x, e)g \mapsto (x, h_U(x))g = (x, h_U(x)g).$$

Итак, мы доказали, что

$$f_U \circ (f'_U)^{-1}(x, g) \equiv (x, h_U(x)g), \quad \text{где } h_U: U \rightarrow G. \quad (1.9)$$

Так как $f'_U \circ (f_U)^{-1} \circ f_U \circ (f'_U)^{-1} = \text{id}$, точно так же, как и выше, доказывается, что $f'_U \circ (f_U)^{-1}(x, g) = (x, h_U^{-1}g)$.

Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Обозначая f_{U_i} через f_i и h_{U_i} через h_i и используя тождество

$$f'_j \circ (f'_i)^{-1} = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1},$$

получаем соотношение

$$g'_{ji} = h_j^{-1} g_{ji} h_i,$$

где через $\{g'_{ji}\}$ обозначен склеивающий коцикл, соответствующий локальным тривиализациям $\{f'_i\}$ расслоения P . Действительно, для любых $x \in U_i \cap U_j, g \in G$ получаем

$$\begin{aligned} (x, g'_{ji}g) &= f'_j \circ (f'_i)^{-1}(x, g) = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1}(x, g) = \\ &= f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1}(x, h_i g) = f'_j \circ (f_j)^{-1}(x, g_{ji} h_i g) = \\ &= (x, h_j^{-1} g_{ji} h_i g), \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое равенство.

Определение 1.5. Коциклы $\{g_{ji}\}, \{g'_{ji}\}$, соответствующие покрытию $\{U_i\}$ многообразия B , называются *эквивалентными*, если для каждого U_i существует отображение $h_i: U_i \rightarrow G$ такое, что

$$h_j(x) g'_{ji}(x) \equiv g_{ji}(x) h_i(x). \quad (1.10)$$

(Под $h_j g'_{ji}$ понимается произведение в группе G .)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Главные расслоения*

$$P = (P_E, B, \pi, G) \quad \text{и} \quad P' = (P'_E, B, \pi', G)$$

эквивалентны тогда и только тогда, когда склеивающие коциклы $\{g_{ji}\}, \{g'_{ji}\}$ этих расслоений, соответствующие некоторому покрытию базы B , эквивалентны.

Доказательство. Если расслоения P и P' эквивалентны и $\{U_i\}, \{f_i\}$ — тривиализация расслоения P с достаточно мелким покрытием $\{U_i\}$ и со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$, то в качестве тривиализации расслоения P' можно выбрать то же покрытие с отображениями $\{f'_i\}$ и коциклом $\{g'_{ji}\}$. Отображения h_i определяются следующим образом: $h_i = f_i \circ f^{-1} \circ (f'_i)^{-1}$, где f из (1.2). Дальнейшее доказательство необходимости почти дословно повторяет приведенный выше вывод формулы (1.10).

Пусть теперь P и P' — два расслоения с тривиализациями $\{U_i\}, \{f_i\}$ и $\{U_i\}, \{f'_i\}$ и эквивалентными коциклами $\{g_{ji}\}$ и $\{g'_{ji}\}$ соответственно.

Действуя так же, как в лемме 1.1, построим по коциклу $\{g_{ji}\}$ расслоение $\tilde{Q}$, эквивалентное P , а по коциклу $\{g'_{ji}\}$ — расслоение $\tilde{Q}'$, эквивалентное P' . Для доказательства теоремы достаточно показать, что расслоения $\tilde{Q}$ и $\tilde{Q}'$ эквивалентны. Построим отображение $\tilde{f}: \tilde{Q}'_E \rightarrow \tilde{Q}_E$ следующим образом.

На каждом $U_i \times G$ рассмотрим отображение $\tilde{f}_i: (x, g) \mapsto (x, h_i(x)g)$. Покажем, что семейство отображений $\{\tilde{f}_i\}$ корректно определяет отображение $\tilde{f}: \tilde{Q}'_E \rightarrow \tilde{Q}_E$. Для этого достаточно проверить, что для любого $x \in U_i \cap U_j$ точки (x, g) и $(x, g'_{ji}g)$, которые задают одну и ту же точку в $\tilde{Q}'_E$, отображаются в точки (x, g^*) и (x, g') соответственно, определяющие одну и ту же точку в $\tilde{Q}_E$, то есть необходимо проверить выполнение тождества $g_{ji}g^* = g'$. Но согласно построению $g^* = h_i g$, $g' = h_j g'_{ji}g$, и из (1.10) получаем $g_{ji}g^* = g_{ji}h_i g = h_j g'_{ji}g = g'$. Корректность определения отображения $\tilde{f}$ доказана. Проверка того, что это отображение действительно задает эквивалентность расслоений $\tilde{Q}'$ и $\tilde{Q}$, предоставляется читателю. $\square$

Как уже было отмечено в примере 1.6, если расслоение P эквивалентно прямому произведению P' , то коцикл $\{g'_{ji}\}$ можно выбрать равным единичному $g'_{ji}(x) \equiv e$. Поэтому из теоремы 1.1 получаем

Следствие 1.1. *Главное расслоение $P = (P_E, B, \pi, G)$ со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ тривиально тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $h_i: U_i \rightarrow G$ такое, что*

$$h_j(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x). \quad (1.11)$$

Пусть расслоение P тривиально. Рассмотрим вновь конструкцию леммы 1.1. Если $x \in U_i \cap U_j$, то для любого $g \in G$ точки $(x, g) \in U_i \times G$ и $(x, g_{ji}g) \in U_j \times G$ определяют одну и ту же точку $\langle x, g \rangle \in \tilde{Q}_E$. Поэтому в силу (1.11) набор отображений $\{s_i\}$, $s_i: U_i \rightarrow U_i \times G$, где $s_i(x) = (x, h_i(x))$, корректно определяет отображение $\tilde{s}: B \rightarrow \tilde{Q}_E$, для которого $\text{pr} \circ \tilde{s} = \text{id}$. Так как расслоения $\tilde{Q}$ и P эквивалентны и эта эквивалентность устанавливается с помощью отображения $\tilde{f}$ (см. лемму 1.1), то отображение $s: B \rightarrow P_E$, где $s = \tilde{f} \circ \tilde{s}$, также обладает тем свойством, что $\pi \circ s = \text{id}$.

Определение 1.6. Непрерывное (гладкое, аналитическое и т.д.) отображение $s: B \rightarrow P_E$ такое, что $\pi \circ s = \text{id}$, называется *непрерывным (гладким, аналитическим и т.д.) сечением* расслоения P .

Предложение 1.1. *Главное расслоение P тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет сечение.*

Доказательство. Необходимость была доказана в терминах склеивающего коцикла. Докажем ее непосредственно из определения тривиального расслоения. Поскольку прямое произведение

$$P' = (B \times G, B, \text{pr}, G)$$

всегда имеет единичное сечение $x \mapsto (x, e)$, то тривиальное расслоение P имеет сечение $s(x) = f^{-1}(x, e)$, где гомеоморфизм f осуществляет эквивалентность P и P' .

Докажем достаточность. Пусть $s: B \rightarrow P_E$ — сечение расслоения P . Для любого $x \in B$ слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен группе G . отождествим эти два многообразия и для любого $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \cong G$ рассмотрим элемент $g(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot (s(\pi(\tilde{x})))^{-1}$, где под « $\cdot$ » понимается умножение в группе G . Так определенный элемент $g(\tilde{x})$ не зависит от способа отождествления $\pi^{-1}(x)$ и G (докажите это, используя п. 2 определения 1.3). Эквивалентность расслоения P прямому произведению устанавливается теперь с помощью гомеоморфизма $f: P_E \rightarrow B \times G$, где $f(\tilde{x}) = (\pi(\tilde{x}), g(\tilde{x}))$. $\square$

Упражнения

1.1. Найдите координатное описание расслоения примера 1.4.

1.2. Докажите, что расслоение $\mathcal{O}^*(-1)$ замечания 1.1 нетривиально как:

а) голоморфное расслоение, б) непрерывное расслоение.

1.3. Докажите, что расслоение Хопфа топологически (как непрерывное расслоение) нетривиально.

1.4. Зададим расслоение $\mathcal{O}^*(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, координатным описанием

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{0\infty}(z) = z^k, \quad g_{0\infty}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Докажите, что это расслоение голоморфно и топологически тривиально тогда и только тогда, когда $k = 0$.

Заметим, что при $k = -1$ это расслоение, как и положено, совпадает с расслоением замечания 1.1, так как последнее задано коциклом $g_{\infty 0}(z) = z$, а $g_{0\infty}(z) = (g_{\infty 0}(z))^{-1}$.

ЛЕКЦИЯ 2

Понятие векторного расслоения. Примеры

Определение векторного расслоения напоминает определение главного расслоения. Отличие состоит в том, что в качестве «стандартных кирпичиков» в этом случае используются прямые произведения окрестностей точек многообразия на стандартное евклидово пространство, в котором действует группа линейных преобразований.

Определение 2.1. *Векторным* (действительным) *расслоением* F *ранга* p называется тройка $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$, где:

- 1) F_E, B — многообразия, $\tilde{\pi}: F_E \rightarrow B$ — сюръективное отображение;
- 2) для любого $x \in B$ множество $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ является линейным пространством;

- 3) для любого $x \in B$ существуют окрестность $U \subset B$ точки x и гомеоморфизм $\tilde{f}_U: \tilde{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}_U} & U \times \mathbb{R}^p \\
 \searrow \tilde{\pi} & & \swarrow \text{pr} \\
 & U &
 \end{array} \tag{2.1}$$

коммутативна и отображение

$$\tilde{f}_U^x: \tilde{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

где через $\tilde{f}_U^x$ обозначено ограничение отображения $\tilde{f}_U$ на слой $\tilde{\pi}^{-1}(x)$, является изоморфизмом линейных пространств.

Пространство F_E называется *тотальным пространством расслоения*, B — *базой расслоения*, $\tilde{\pi}$ — *проекцией*, $\tilde{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^p$ — *слоем расслоения*. Свойство 3 означает, что расслоение F *локально тривиально* (устроено как «простое» прямое произведение над U).

Если все многообразия и отображения, участвующие в определении расслоения, непрерывны (гладкие, аналитические и т. д.), то говорят о топологическом (гладком, аналитическом и т. д.) расслоении F .

Аналогичным образом определяется комплексное векторное расслоение. Простейшим примером векторного расслоения является прямое произведение.

Пример 2.1. Рассмотрим $F = (B \times \mathbb{R}^p, B, \text{pr})$, где через pr обозначена проекция на первый сомножитель. Очевидно, что все условия определения 2.1 выполнены.

По каждому главному расслоению со структурной группой $GL(p, \mathbb{R})$ можно построить векторное расслоение следующим образом.

Рассмотрим главное расслоение $P = (P_E, B, \pi, GL(p, \mathbb{R}))$. Обозначим через F_E пространство $P_E \times \mathbb{R}^p / \sim$, где

$$(\tilde{x}g, v) \sim (\tilde{x}, gv) \quad \text{для любых } \tilde{x} \in P_E, g \in GL(p, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^p.$$

(Напомним, что группа $GL(p, \mathbb{R})$ действует на P_E справа, а на $\mathbb{R}^p$ — слева.) Будем обозначать точки пространства F_E через $\langle \tilde{x}, v \rangle$ (класс эквивалентности пары $(\tilde{x}, v)$). Определим отображение $\tilde{\pi}: F_E \rightarrow B$ следующим образом: $\tilde{\pi}(\langle \tilde{x}, v \rangle) = \pi(\tilde{x})$.

Лемма 2.1. *Тройка $F = (F_E, B, \pi)$ является векторным расслоением ранга p .*

Доказательство. Поскольку

$$(GL(p, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p / \sim) \cong \mathbb{R}^p$$

(гомеоморфность этих двух пространств устанавливается с помощью отображения $\langle g, v \rangle \mapsto gv$), то диаграмма (1.1) после умножения пространств $\pi^{-1}(U)$ и $U \times GL(p, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^p$ и взятия отношения эквивалентности приобретает вид (2.1):

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^p / \sim & \xrightarrow{\tilde{f}_U} & (U \times GL(p, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}^p / \sim \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \text{pr} \\ & U, & \end{array} \quad (2.2)$$

где $\tilde{f}_U(\langle \tilde{x}, v \rangle) := \langle f_U(\tilde{x}), v \rangle$. Читателю предоставляется проверить, что все условия определения 2.1 выполнены (следуют из соответствующих условий определения 1.3). $\square$

Определение 2.2. Построенное выше расслоение называется *ассоциированным с исходным главным расслоением*.

Эквивалентность векторных расслоений определяется аналогично эквивалентности главных расслоений.

Определение 2.3. Два векторных расслоения F и $F' = (F'_E, B, \pi')$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм $\tilde{f}$ между F_E и F'_E , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_E & \xrightarrow{\tilde{f}} & F'_E \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array} \quad (2.3)$$

коммутативна и отображение $\tilde{f}|_{\tilde{\pi}^{-1}(x)}$ является изоморфизмом линейных пространств для любого $x \in B$.

(Если речь идет об эквивалентности гладких, аналитических и т. д. расслоений, то требуется, чтобы отображение $\tilde{f}$ было диффеоморфизмом, биголоморфным и т. д. отображением.)

Векторное расслоение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению.

Перейдем теперь к координатному описанию векторного расслоения. Рассмотрим покрытие $\{U_i\}$ базы B такое, что над каждым U_i расслоение F тривиально, и локальные тривиализации (2.1) расслоения F над этими окрестностями (т. е. зафиксируем гомеоморфизмы $\tilde{f}_{U_i}$, которые мы будем обозначать через $\tilde{f}_i$). Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p & \xleftarrow{\tilde{f}_i} & \tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\tilde{f}_j} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p \\
 & \searrow \text{pr} & \downarrow \tilde{\pi} & \swarrow \text{pr} & \\
 & & U_i \cap U_j & &
 \end{array} \quad (2.4)$$

Отображение

$$\tilde{f}_j^x \circ (\tilde{f}_i^x)^{-1}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (2.5)$$

для любого $x \in U_i \cap U_j$ является автоморфизмом линейного пространства $\mathbb{R}^p$ и, стало быть, в стандартном базисе этого пространства задается некоторой матрицей $g_{ji}(x)$. Тем самым для любых U_i, U_j с непустым пересечением определяются отображения

$$g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(p, \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Из конструкции этих отображений точно так же, как в случае главного расслоения (см. соотношения (1.6)), легко следует, что $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$ для любого $x \in U_i \cap U_j$ (здесь через g^{-1} обозначается матрица, обратная к g) и если три окрестности U_i, U_j, U_k имеют непустое пересечение, то $g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv I$, где через I обозначена единичная матрица размера $(p \times p)$.

Лемма 2.2. По векторному расслоению F , покрытию $\{U_i\}$ и фиксированным тривиализациям $\{\tilde{f}_i\}$ расслоения F над $\{U_i\}$ можно построить набор отображений (2.6), обладающих следующими свойствами:

$$g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \quad g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv I. \quad (2.7)$$

И обратно, по любому покрытию $\{U_i\}$ многообразия B и по любому набору отображений (2.6), обладающих свойствами (2.7),

можно построить векторное расслоение $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$. Если набор отображений $\{g_{ji}\}$ был построен по векторному расслоению F , то расслоение F' будет эквивалентно расслоению F .

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.1. Рассмотрим несвязное объединение $\tilde{Q} = \bigsqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^p)$ и введем на этом множестве следующее отношение эквивалентности $\sim$: если $x \in U_i \cap U_j$, то

$$\begin{aligned} (x, v) &\sim (x, g_{ji}(x)v) && \text{для } (x, v) \in (U_i \times \mathbb{R}^p), (x, g_{ji}(x)v) \in (U_j \times \mathbb{R}^p), \\ (x, v) &\sim (x, v) && \text{для любых } x \in U_i, v \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Из свойств (2.7) следует, что это действительно отношение эквивалентности.

Обозначим через F'_E многообразие $\tilde{Q}/\sim$, а через $\langle x, v \rangle$ — точку F'_E (класс эквивалентности пары (x, v)). Определим отображение $\tilde{\pi}': F'_E \rightarrow B$ соотношением $\tilde{\pi}'(\langle x, v \rangle) = x$. Читателю предоставляется проверить, что так построенная тройка $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ действительно является векторным расслоением.

Если отображения (2.6) построены по расслоению F с фиксированными локальными тривиализациями $\{\tilde{f}_i\}$, то эквивалентность расслоений F и F' устанавливается с помощью гомеоморфизма $\tilde{f}: F_E \rightarrow F'_E$, где $\tilde{f}$ совпадает с $\tilde{f}_i$ на $\tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ (проверьте самостоятельно корректность определения этого отображения). $\square$

Из описания конструкции ассоциированного с главным векторного расслоения и из предыдущей леммы получаем следствие.

Следствие 2.1. *Главное расслоение и ассоциированное с ним векторное расслоение определяют один и тот же склеивающий цикл $\{g_{ji}\}$.*

Доказательство. Рассмотрим вновь диаграмму (2.2). Поскольку

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p / \sim,$$

то тривиализации $\tilde{f}_i$ ассоциированного векторного расслоения можно выбрать следующим образом: $\tilde{f}_i(\langle \tilde{x}, v \rangle) = \langle f_i(\tilde{x}), v \rangle$. Пусть $(\tilde{x}, v)$ — представитель класса эквивалентности $\langle \tilde{x}, v \rangle$, а $((x, l), v)$ — представитель $\langle x, v \rangle \in ((U_i \cap U_j) \times \text{GL}(p, \mathbb{C})) \times \mathbb{R}^p / \sim \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p$. Тогда

$$\tilde{f}_j \circ (\tilde{f}_i)^{-1}(\langle x, v \rangle) = \langle f_j \circ f_i^{-1}(x, l), v \rangle = \langle (x, g_{ji}(x)), v \rangle = \langle x, g_{ji}(x)v \rangle.$$

Следовательно, $\tilde{f}_j^x \circ (\tilde{f}_i^x)^{-1}(v) = g_{ji}(x)v$ для любого фиксированного x и любого $v \in \mathbb{R}^p$. $\square$

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с расслоениями следующего примера.

Пример 2.2. Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{O}(k)$ ранга 1, заданное следующим координатным описанием:

$$U_0 = \mathbb{C}, \quad U_\infty = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, \quad g_{0\infty}(z) = z^k, \quad g_{0\infty}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. Это расслоение ассоциировано с расслоением $\mathcal{O}^*(k)$ упражнения 1.4.

Конструкции, аналогичные конструкциям лекции 1 (см. диаграмму (1.7) и соотношение (1.8)), приводят к аналогу теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Векторные расслоения $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ и $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда склеивающие коциклы $\{g_{ji}\}, \{g'_{ji}\}$ этих расслоений, соответствующие некоторому покрытию базы B , эквивалентны (в смысле определения 1.5).*

Если расслоение F эквивалентно прямому произведению F' , то коцикл $\{g'_{ji}\}$ можно выбрать равным единичному: $g'_{ji}(x) \equiv I$. Поэтому из теоремы 2.1 получаем следствие.

Следствие 2.2. *Векторное расслоение $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ тривиально тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $h_i: U_i \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ такое, что*

$$h_j(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x). \quad (2.8)$$

Обозначим через h_i^l l -й столбец матрицы h_i , получим отображение

$$h_i^l: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p. \quad (2.9)$$

Если расслоение F тривиально, то в силу (2.8) корректно определены отображения $s^l: B \rightarrow F_E$, $l = 1, \dots, p$, где

$$s^l(x) = (\tilde{f}_i)^{-1}(x, h_i^l(x))$$

на U_i (проверьте это). Ясно, что $\tilde{\pi} \circ s^l = \mathrm{id}$, то есть отображение s^l является сечением расслоения F (в смысле определения 1.6, в котором в случае векторного расслоения надо формально поменять P на F и P_E на F_E .)

Таким образом, из (1.11) получаем

Следствие 2.3. *Векторное расслоение F со склеивающим коциклом $\{g_{ji}\}$ имеет сечение тогда и только тогда, когда для каждого U_i существует отображение $s_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ такое, что*

$$s_j(x) \equiv g_{ji}(x)s_i(x). \quad (2.10)$$

(В зависимости от непрерывности, гладкости или аналитичности отображений s_i , g_{ji} говорят о непрерывном, гладком или аналитическом сечении.)

Из того, что невырожденность матрицы $h_i(x)$ эквивалентна линейной независимости столбцов этой матрицы при всех x , и из следствия 2.2 аналогично предложению 1.1 получаем

Предложение 2.1. *Векторное расслоение F ранга r тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет r сечений (непрерывных, гладких или аналитических в зависимости от типа расслоения), линейно независимых над каждой точкой базы.*

Пример 2.3. Покажем, что расслоение $\mathcal{O}(k)$ примера 2.1 тривиально тогда и только тогда, когда $k=0$ (и тем самым решим упражнение 1.4). Действительно, если это расслоение топологически тривиально, то существуют непрерывные функции $h_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ и $h_\infty: \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ такие, что $h_0(z) = g_{0\infty}(z)h_\infty(z) = z^k h_\infty(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Так как $h_0(z)$ не обращается в нуль в односвязной области $\mathbb{C}$, то многозначная функция $\ln(h_0(z))$ допускает выделение однозначных ветвей в $\mathbb{C}$. То же самое верно и для функции $\ln(h_\infty(z))$ в $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Следовательно, и функция $h(z) = \ln(h_0(z)) - \ln(h_\infty(z))$ должна допускать выделение однозначных ветвей в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Но согласно предположению $h(z) = k \ln z$, и эта функция допускает выделение однозначных ветвей в указанной области тогда и только тогда, когда $k=0$. Таким образом, исходное расслоение при $k \neq 0$ топологически и, следовательно, аналитически нетривиально.

С другой стороны, при $k=0$ расслоение $\mathcal{O}(k)$ является прямым произведением и поэтому тривиально как топологически, так и аналитически.

Рассмотрим два следующих очень важных примера векторных расслоений.

Пример 2.4. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие гладкого многообразия B , $c_i = (U_i, \xi^i, \mathbb{R}^p)$, $\xi^i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ — карты. Для любых U_i, U_j , имеющих непустое пересечение, определим отображение

$$g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{R}), \quad g_{ji}(x) = J_{\xi^i \circ (\xi^j)^{-1}}(\xi^i(x)),$$

где $J_f = ((\partial f^\alpha / \partial x^\beta))$ — якобиева матрица вектор-функции $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Построенное по покрытию $\{U_i\}$ и указанному склеивающему коциклу $\{g_{ji}\}$ векторное расслоение называется *касательным расслоением многообразия B* и обозначается через τ_B .

Векторное расслоение, построенное по тому же покрытию и склеивающему коциклу $\{g_{ji}^*\}$, $g_{ji}^*(x) = (g_{ji}^t(x))^{-1}$, называется *кокасательным расслоением* многообразия B и обозначается через τ_B^* (значком t здесь и далее обозначается операция транспонирования).

(Заметим, что часто касательный вектор к многообразию B в точке x так и определяется — как класс эквивалентных пар (c_i, h^i) , где c_i — карта, $h^i \in \mathbb{R}^p$, а отношение эквивалентности задается соотношением $h^j = J_{\xi^j \circ (\xi^i)^{-1}}(\xi^i(x))h^i$.)

Оглавление

Предисловие	3
-----------------------	---

Часть I

Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения

Введение	7
Лекция 1. Понятие главного расслоения. Примеры	10
Лекция 2. Понятие векторного расслоения. Примеры	20
Лекция 3. Связность в векторном расслоении. Локальная система	29
Лекция 4. Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 1	37
Лекция 5. Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 2	46
Лекция 6. Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Локальная теория — 3	54
Лекция 7. Мероморфные связности с регулярными особыми точками. Глобальная теория	62
Лекция 8. Проблема Римана—Гильберта. Метод решения	72
Лекция 9. Теорема Биркгофа—Гротендика	81
Лекция 10. Следствия теоремы Биркгофа—Гротендика	92
Лекция 11. Контрпример к проблеме Римана—Гильберта	101
Лекция 12. Биркгофова стандартная форма	111
Заключение	117

Часть II

Изомонодромные деформации фуксовых систем

Лекция 13. Понятие изомонодромной деформации. Критерий изомонодромности	121
Лекция 14. Изомонодромная деформация Шлезингера	130

Лекция 15. Классификация изомонодромных деформаций фуксовых систем	138
Лекция 16. Подвижные особенности уравнения Шлезингера — 1 . . .	144
Лекция 17. Подвижные особенности уравнения Шлезингера — 2 . . .	155
Лекция 18. Уравнение Пенлеве VI и его связь с уравнением Шлезингера	160
Приложение 1. Построение фуксовой системы по фуксову уравнению	171
Приложение 2. Вид решений фуксовой системы с параметрами . . .	175
Приложение 3. Теорема Биркгофа—Гротендика с параметрами . . .	180
Приложение 4. Высшие гомотопические группы и точные гомотопические последовательности	186
Литература	192
 Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке	
(Д. В. Аносов, В. П. Лексин)	195
Список работ А. А. Болибруха	212