

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

**Ю. А. БРЮХАНОВ, А. Л. ПРИОРОВ,
В. И. ДЖИГАН, В. В. ХРЯЩЕВ**

ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по направлениям «Радиотехника»
и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»*

Ярославль
ЯрГУ
2013

УДК 621.37(075.8)
ББК 3811.3я73
О 75

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2013 года.*

Рецензенты:
доктор технических наук В. В. Витязев;
кафедра основ радиотехники
Московского энергетического института
(технического университета)

Основы цифровой обработки сигналов: учебное
О 75 пособие / Ю. А. Брюханов, А. Л. Приоров, В. И. Джиган,
В. В. Хрящев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова.
— Ярославль : ЯрГУ, 2013. — 344 с.
ISBN 978-5-8397-0933-1

В учебном пособии описаны современные методы цифровой обработки сигналов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 210400.62 Радиотехника и 210700.62 Инфокоммуникационные технологии и системы связи (дисциплина «Основы цифровой обработки сигналов», цикл Б3), очной формы обучения.

Материал может быть использован также при подготовке студентами курсовых и выпускных квалификационных работ.

Ил. 134. Табл. 4. Библиогр.: 39 назв.

УДК 621.37(075.8)
ББК 3811.3я73

ISBN 978-5-8397-0933-1

© ЯрГУ, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ.....	9
ВВЕДЕНИЕ	11
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ	14
1.1. Последовательности.....	14
1.2. Дискретный ряд Фурье	16
1.3. Z-преобразование	16
1.3.1. Последовательности конечной длины	17
1.3.2. Физически реализуемые последовательности	17
1.3.3. Нереализуемые последовательности	17
1.3.4. Z-преобразование некоторых последовательностей	18
1.4. Соотношение между z-преобразованием и Фурье- преобразованием последовательности.....	19
1.5. Обратное z-преобразование	21
1.6. Свойства z-преобразования	23
1.6.1. Линейность.....	23
1.6.2. Задержка	23
1.6.3. Свертка последовательностей.....	23
1.6.4. Перемножение последовательностей.....	24
1.6.5. Одностороннее z-преобразование. Задержка физически реализуемых последовательностей	25
1.7. Дискретное преобразование Фурье	26
1.7.1. Связь между дискретным преобразованием Фурье и z-преобразованием.....	28
1.7.2. Дискретное преобразование Фурье последовательностей конечной длины	32
1.7.3. Эффекты наложения	33
1.8. Свойства дискретного преобразования Фурье	35
1.8.1. Линейность.....	36
1.8.2. Сдвиг.....	36
1.8.3. Свойства симметрии	37
1.9. Свертка периодических последовательностей	39
1.10. Линейная свертка конечных последовательностей.....	41
1.11. Разностные уравнения	45
1.12. Решение разностных уравнений с применением одностороннего z-преобразования.....	47

1.13. Контрольные вопросы	49
1.14. Литература	50
2. ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ.....	51
2.1. Взаимная связь непрерывного сигнала и полученного из него дискретизированного сигнала	51
2.2. Спектр дискретизированного сигнала	54
2.3. Соотношения между спектрами непрерывных и дискретных сигналов	57
2.4. Восстановление непрерывного сигнала из дискретного	60
2.5. Типовые периодические сигналы.....	63
2.5.1. Последовательность показательных импульсов.....	64
2.5.2. Косинусоидальное колебание	64
2.5.3. Последовательность прямоугольных импульсов	66
2.5.4. Последовательность прямоугольных радиоимпульсов.....	67
2.6. Типовые непериодические сигналы.....	69
2.6.1. Показательный импульс	69
2.6.2. Прямоугольный импульс.....	70
2.6.3. Прямоугольный радиоимпульс.....	71
2.6.4. Цифровой единичный импульс	73
2.6.5. Единичный скачок.....	74
2.7. Контрольные вопросы	75
2.8. Литература	77
3. ЦИФРОВЫЕ ЦЕПИ	78
3.1. Цифровые линейные цепи с постоянными параметрами	78
3.2. Физическая реализуемость. Устойчивость.....	82
3.3. Частотная характеристика. Геометрическая интерпретация	84
3.4. Способы построения цифровых цепей	87
3.5. Структурные схемы цепей без полюсов	96
3.6. Нерекурсивная цепь второго порядка.....	98
3.6.1. Частотные свойства.....	98
3.6.2. Временные характеристики	109
3.7. Рекурсивная цепь второго порядка	113
3.7.1. Частотные свойства.....	114
3.7.2. Временные характеристики	123
3.8. Контрольные вопросы	130

3.9. Литература	131
4. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ СИГНАЛАХ	133
4.1. Представление чисел	133
4.2. Усечение и округление	138
4.3. Квантование сигнала.....	141
4.4. Аналогово-цифровое преобразование	145
4.5. Цифроаналоговое преобразование сигналов	146
4.6. Контрольные вопросы	150
4.7. Литература	150
5. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ЦЕПЯХ	152
5.1. Реакция идеальной цифровой цепи на шум квантования.....	152
5.2. Квантование арифметических операций в БИХ-цепях.....	155
5.3. Ограничения, вызванные переполнением, и отношение сигнал/шум	159
5.4. Квантование арифметических операций в КИХ-цепях	161
5.5. Предельные циклы и пульсации, вызванные переполнением.....	162
5.6. Квантование коэффициентов	165
5.7. Техническая реализация цифровых цепей	167
5.8. Контрольные вопросы	171
5.9. Литература	173
6. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.....	174
6.1. Алгоритмы БПФ по основанию 2.....	174
6.2. БПФ с прореживанием по времени	175
6.3. БПФ с прореживанием по частоте	181
6.4. Контрольные вопросы	184
6.5. Литература	185
7. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ОКОН.....	186
7.1. Основные определения	186
7.2. Синтез цифровых фильтров	187
7.2.1. Задание требований к цифровым фильтрам.....	188
7.2.2. Типы частотно-избирательных фильтров и задание требований к ним	189

7.3. Синтез КИХ-фильтров методом окон	192
7.3.1. Общая характеристика задачи синтеза КИХ-фильтров методом окон	192
7.3.2. Явление Гиббса	195
7.3.3. Окна и их основные параметры	198
7.3.4. Методика синтеза КИХ-фильтров на основе оконных функций	203
7.3.5. Особенности использования метода окон	204
7.4. Контрольные вопросы	205
7.5. Литература	206
8. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	207
8.1. Основные определения	207
8.2. Аналоговые фильтры-прототипы нижних частот	208
8.2.1. Фильтры Баттерворта	210
8.2.2. Фильтры Чебышёва	214
8.2.3. Эллиптические фильтры (фильтры Золотарева-Кауэра)	219
8.3. Билинейное z-преобразование	221
8.3.1. Определение билинейного z-преобразования	221
8.3.2. Свойства билинейного z-преобразования	222
8.3.3. Частотные преобразования	228
8.3.4. Методика синтеза цифровых фильтров на основе билинейного z-преобразования	231
8.3.5. Особенности использования метода билинейного z-преобразования	232
8.4. Контрольные вопросы	233
8.5. Литература	234
9. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ЧЕБЫШЁВУ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ	235
9.1. Основные определения	235
9.2. КИХ-фильтры с линейной ФЧХ	236
9.2.1. Фильтры типа I – симметричная импульсная характеристика, N – четное	236
9.2.2. Фильтры типа II – симметричная импульсная характеристика, N – нечетное	237

9.2.3. Фильтры типа III – антисимметричная импульсная характеристика, N – четное.....	238
9.2.4. Фильтры типа IV – антисимметричная импульсная характеристика, N – нечетное.....	239
9.3. Теорема чередования	240
9.4. Алгоритм замены Ремеза.....	245
9.5. Контрольные вопросы	248
9.6. Литература	250
10. МНОГОСКОРОСТНАЯ ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ	251
10.1. Основные операторы изменения частоты дискретизации.....	251
10.1.1. Временные соотношения.....	251
10.1.2. Соотношения в частотной области	254
10.1.3. Многоскоростные тождества	259
10.1.5. Основные структуры.....	261
10.1.6. Связь входного и выходного сигналов	263
10.1.7. Требования к цифровым фильтрам	264
10.1.8. Банки цифровых фильтров.....	266
10.2. Контрольные вопросы	268
10.3. Литература	269
11. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	270
11.1. Основные определения	270
11.2. Введение в теорию вейвлет-преобразования	271
11.2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП).....	272
11.2.2. Признаки вейвлета	274
11.2.3. Примеры вейвлетообразующих функций (материнских вейвлетов).....	275
11.2.4. Свойства вейвлет-анализа	278
11.2.5. Дискретное вейвлет-преобразование	279
11.2.6. Быстрое вейвлет-преобразование.....	280
11.2.7. Частотный подход к вейвлет-преобразованию.....	283
11.3. Удаление шумов из сигнала с использованием вейвлет-преобразования	285
11.4. Контрольные вопросы	288
11.5. Литература	289

12. ОСНОВЫ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ	291
12.1. Вводные замечания	291
12.2. Требования к адаптивным фильтрам	292
12.3. Критерии функционирования адаптивных фильтров	295
12.4. Приложения адаптивных фильтров	296
12.5. Корреляционная матрица	301
12.6. Собственные числа и собственные векторы корреляционной матрицы.....	303
12.7. Винеровская фильтрация.....	307
12.8. Поверхность среднеквадратической ошибки.....	310
12.9. Алгоритм Ньютона.....	313
12.10. Постоянные времени алгоритма Ньютона	316
12.11. Алгоритм наискорейшего спуска	317
12.12. Постоянные времени алгоритма наискорейшего спуска.....	319
12.13. LMS-алгоритм.....	322
12.14. Переходные процессы в LMS-алгоритме	324
12.15. Качество адаптивной фильтрации с помощью LMS-алгоритма.....	326
12.16. NLMS-алгоритм.....	327
12.17. Задача наименьших квадратов и ее решение	329
12.18. Рекурсивная задача наименьших квадратов	331
12.19. Решение рекурсивной задачи наименьших квадратов	332
12.20. Качество адаптивной фильтрации с помощью RLS-алгоритма.....	334
12.21. Заключительные замечания по адаптивной обработке сигналов	335
12.22. Контрольные вопросы	337
12.23. Литература	341
Заключение.....	343

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

АА	– адаптивный алгоритм
ААР	– адаптивная антенная решетка
АКФ	– автокорреляционная функция
АФ	– адаптивный фильтр
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
АЦП	– аналогово-цифровой преобразователь
БВП	– быстрое вейвлет-преобразование
БГШ	– белый гауссовский шум
БИХ	– бесконечная импульсная характеристика
БПФ	– быстрое преобразование Фурье
ВК	– весовые коэффициенты
ДВП	– дискретное вейвлет-преобразование
ДН	– диаграмма направленности
ДПФ	– дискретное преобразование Фурье
ИХ	– импульсная характеристика
КИХ	– конечная импульсная характеристика
КМА	– кратномасштабный анализ
ЛПП	– линейная (цепь) с постоянными параметрами
ЛИС	– линейная инвариантная к сдвигу (цепь)
ЛС	– линейная стационарная (цепь)
МСИ	– межсимвольная интерференция
НВП	– непрерывное вейвлет-преобразование
НПФ	– непрерывное преобразование Фурье
ОДПФ	– обратное дискретное преобразование Фурье
ОПФ	– оконное преобразование Фурье
ПЗ	– полоса задерживания фильтра
ПЗУ	– постоянное запоминающее устройство
ПП	– полоса пропускания фильтра

ПФ – полосовой фильтр
ПХ – переходная характеристика
РФ – режекторный фильтр
СКО – среднее квадратическое отклонение
ФВЧ – фильтр верхних частот
ФНЧ – фильтр нижних частот
ФЧХ – фазочастотная характеристика
ЧХ – частотная характеристика
ЦАП – цифроаналоговый преобразователь
ЦОС – цифровая обработка сигналов
ЦФ – цифровой фильтр

LS (Least Squares) – наименьшие квадраты
LMS (Least Mean Square) – алгоритм по критерию наименьшего среднего квадрата
MSE-функция (Means Square Error) – функция среднее квадратическое отклонение
NLMS (Normalized LMS) – нормализованный LMS-алгоритм
QR RLS-алгоритм – RLS-алгоритм на основе QR-разложения матрицы
RG – регистр
RLS (Recursive Least Squares) – рекурсивный алгоритм по критерию наименьших квадратов
WLS (Weighted Least Squares) – взвешенные, наименьшие квадраты

ВВЕДЕНИЕ

*Дай, господи, желания и воли,
чтобы науку трудную постичь*

Состояние и перспективы развития информационных технологий в начале XXI века характеризуются широким практическим использованием техники цифровой обработки сигналов (ЦОС) – одной из самых динамичных и быстро развивающихся технологий в мире инфокоммуникаций и радиотехники. Методы и техника ЦОС вызывают повышенный интерес ученых и специалистов, работающих в различных областях, таких как связь и системы управления, радиотехника и электроника, акустика и сейсмология, радиовещание и телевидение, измерительная техника и приборостроение. Ежегодно в мире проводятся десятки международных научно-технических конференций и семинаров, посвященных решению актуальных проблем ЦОС. Издаются многочисленные книги и журналы, освещающие последние достижения в области теории и практики обработки цифровых сигналов. Постоянно растет число предприятий, организаций и научных центров, использующих в своих разработках методы и технологии ЦОС.

Вся история развития теории и техники ЦОС напрямую связана с достижениями в области дискретной схмотехники и компьютерных технологий. Дискретизация непрерывной информации во времени и квантование по уровню являются основой ее эффективного кодирования, преобразования, передачи и архивации. С появлением в 1940-х годах первых ЭВМ стало реальным возникновение нового фундаментального научного направления вычислительной математики, одним из разделов которого можно считать машинные алгоритмы цифровой обработки данных. Однако ограниченные вычислительные ресурсы используемых в те годы ЭВМ не позволяли проводить обработку данных в реальном времени.

Положение стало радикально меняться с появлением в 1960-х годах класса малых ЭВМ, ориентированных преимущественно на решение задач управления и обработки

данных в реальном времени. С этого момента формируется круг проблем и задач теории ЦОС как самостоятельного научного направления, которому в дальнейшем предстоит свой многоэтапный путь становления и развития.

Первый крупный вклад в теорию ЦОС внесли американские ученые Б. Голд и Ч. Рэйдер. Их монография стала первой настольной книгой специалистов по ЦОС. Фундаментальной работой, подводящей итоги начального становления теории ЦОС как нового научного направления, является книга Л. Рабинера, Б. Гоулда. Практически одновременно появляется одно из первых учебных пособий по ЦОС авторов А. Оппенгейма и Р. Шафера. Заметный вклад в развитие теории ЦОС внесли также и отечественные ученые.

Дисциплина «Основы цифровой обработки сигналов» является базовой для изучения связистами и радиотехниками. Здесь рассматриваются спектральная теория периодических и непериодических сигналов, линейная теория цепей дискретного времени, способы построения цифровых цепей, частотные и временные характеристики базовых звеньев первого и второго порядков, изучаются эффекты квантования и переполнения в цифровых сигналах и цепях. Большую часть этого материала можно найти в известных книгах Э. Айфичера, Б. Джервиса, С. Митры и М. Хайеса.

Пособие состоит из двенадцати разделов. Оно обобщает многолетний опыт авторов и их коллег по преподаванию данного материала студентам радиинженерных специальностей и направлений физического факультета Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Материал может быть использован при решении задач курсового и дипломного проектирования, а также для выполнения студенческих научных работ.

Содержание учебного пособия распределено между соавторами следующим образом: введение написано А. Л. Приоровым, разделы 1–5 – Ю. А. Брюхановым, разделы 6–11 – А. Л. Приоровым и В. В. Хрящевым при активном участии В. В. Волохова, раздел 12 – В. И. Джиганом.

Выражаем глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН Ю. Б. Зубареву, профессорам В. П. Дворковичу, А. В. Дворковичу, В. В. Витязеву, А. А. Петровскому, Б. А. Алпатотову, Ю. С. Бехтину, В. Г. Карташеву, В. Г. Евстигнееву, М. А. Щербакову, А. К. Бернюкову, кандидату технических наук А. М. Лаврентьеву, которые оказали значительное влияние на формирование взглядов авторов в данном научном направлении. Эти взгляды формировались также в совместной работе с нашими коллегами с кафедры динамики электронных систем ЯрГУ, среди которых особенно хочется отметить А. Н. Тараканова, И. В. Апалькова, И. С. Мочалова, М. А. Дубова, А. И. Топникова, С. А. Новоселова, Е. В. Сергеева. Всем им авторы очень признательны и за совместную исследовательскую работу, и за помощь в обеспечении учебного процесса.

Отдельные слова благодарности профессору М. К. Чобану и старшему преподавателю, кандидату технических наук В. А. Волохову за предоставленные материалы, а также ведущему электронике Ю. А. Лукашевичу и студентам кафедры ДЭС А. Носкову, В. Антипову и К. Туманову за активное участие в создании оригинал-макета пособия.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Теория цифровых сигналов и линейных систем связана с описанием и обработкой временных последовательностей. В настоящем разделе и большей части книги будем считать, что квантование элементов последовательности по уровню отсутствует. Это предположение о бесконечно малом шаге квантования, относящееся как к отсчетам сигнала, так и к коэффициентам линейных цепей (систем), будет использовано при изучении общей теории дискретных (по времени, но не по уровню) сигналов и цепей. После этого будут рассмотрены различные эффекты, возникающие в цифровых сигналах и цепях с определенной точностью квантования по уровню из-за конечной длины машинного слова.

1.1. Последовательности

Цифровые последовательности определяются лишь для дискретных значений независимой переменной (времени). Обычно время квантуется равномерно, т. е. $t = kT$, где T – интервал между отсчетами. Математически цифровые сигналы представляются в виде непрерывной последовательности чисел. Для описания последовательностей может быть использовано одно из следующих обозначений:

$$\{x(n)\}, N_1 \leq n \leq N_2, \quad (1.1a)$$

$$\{x(nT)\}, N_1 \leq n \leq N_2, \quad (1.1б)$$

$$x(n), N_1 \leq n \leq N_2, \quad (1.1в)$$

$$x(nT), N_1 \leq n \leq N_2. \quad (1.1г)$$

Обозначения (1.1a) и (1.1в) могут применяться и при неравномерном расположении отсчетов, тогда как (1.1б) и (1.1г) явно предполагают их равномерное размещение. Если отсчеты

расположены равномерно, то такая последовательность называется решетчатой функцией.

Последовательность может быть получена несколькими способами. Проще всего взять набор чисел и расположить их в виде последовательности. Например, числа $0, 1, 2, \dots, (N-1)$ образуют «пилообразную» последовательность $x(n)=n, 0 \leq n \leq N-1$. Другой способ состоит в использовании некоторого рекуррентного соотношения. Например, $x(n)=x(n-1)/2$ с начальным условием $x(0)=1$ дает последовательность

$$x(n)=(1/2)^n, 0 \leq n < \infty.$$

Еще один способ: взять равноотстоящие отсчеты непрерывного колебания и из их величин образовать последовательность, т. е. положить $x(nT)=x(t)|_{t=nT}, -\infty \leq n \leq \infty$, где T – интервал дискретизации. Физически для получения $x(n)$ этим способом используются дискретизаторы, а для получения цифровых последовательностей – аналогово-цифровые преобразователи (АЦП).

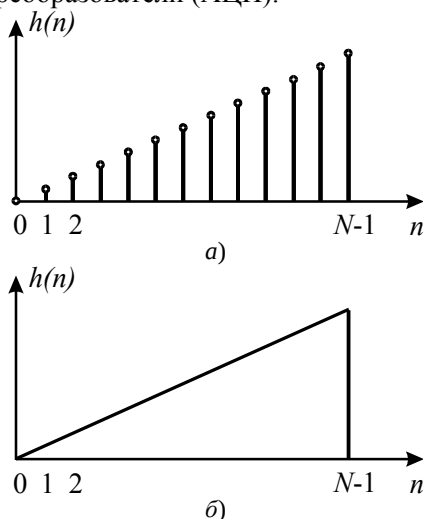


Рис. 1.1. Примеры изображения последовательностей:

а) в виде отрезков соответствующей длины; б) – в виде огибающей

Первые два способа получения последовательностей не связаны со временем, тогда как третий существенно от него зависит. Отсюда видно, что для описания последовательностей пригодны в том или ином смысле все обозначения (1.1).

Часто полезным и информативным является графическое изображение последовательностей. Для получения графического изображения (рис.1.1) будем использовать два способа.

Покажем это на примере изображения последовательности $x(n)=n$, $0 \leq n \leq N-1$. При использовании первого способа n_0 -й элемент последовательности изображается отрезком соответствующей длины, проведенным от оси абсцисс из точки $n=n_0$ (рис.1.1а). В некоторых случаях нет смысла изображать каждую выборку, достаточно провести только огибающую последовательности (рис.1.1б).

1.2. Дискретный ряд Фурье

Если комплексный спектр произвольной последовательности $x(n)$ может быть выражен функцией

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \quad (1.2)$$

то существует и обратное преобразование, позволяющее выразить $x(n)$ через $X(e^{j\omega})$,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (1.3)$$

Здесь и ниже, за исключением особо оговоренных случаев, $\omega = \omega T$.

1.3. Z-преобразование

Одним из наиболее полезных методов представления последовательностей и работы с ними является z-преобразование. Для последовательности $x(n)$, заданной при всех n , оно определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (1.4)$$

где z – комплексная переменная. Ясно, что комплексная функция (1.4) определена лишь для тех значений z , при которых степенной ряд сходится.

1.3.1. Последовательности конечной длины

Если $x(n)$ отлична от нуля только в интервале $N_1 \leq n \leq N_2$ ($N_1 < N_2$), где N_1 и N_2 конечны, то $X(z)$ сходится в z -плоскости везде, за исключением, может быть, точек $z=0$ или $z=\infty$.

На последовательностях конечной длины основан важный класс цифровых цепей. Типичная последовательность $\{x(n)\}$ конечной длины имеет следующий вид (рис. 1.2):

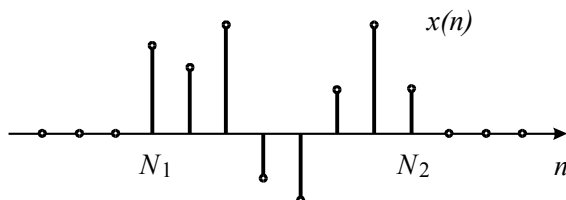


Рис. 1.2. Типичная последовательность конечной длины

Последовательности бесконечной длины составляют основу другого большого класса цифровых цепей.

1.3.2. Физически реализуемые последовательности

Физически реализуемые последовательности – если $x(n)$ отличается от нуля только при $0 \leq n < \infty$. При этом ряд $X(z)$ сходится везде вне круга радиуса R_1 . Величина R_1 зависит от положения полюсов функции $X(z)$. Ниже будет показано, что при $R_1 < 1$ соответствующая система является устойчивой. Физически реализуемые последовательности весьма важны, так как на их основе строится большинство реальных систем.

1.3.3. Нереализуемые последовательности

Физически нереализуемые последовательности – если $x(n)$ имеет ненулевые значения в области $-\infty < n < N_1 \leq 0$. При этом ряд $X(z)$ сходится во всех точках, лежащих в круге радиуса R_1 , причем R_1 определяется положением полюсов $X(z)$. В практических задачах нереализуемые последовательности обычно

не встречаются, но при рассмотрении некоторых теоретических вопросов они могут представлять интерес.

1.3.4. Z-преобразование некоторых последовательностей

а. Цифровой единичный импульс

$$x(n) = \delta(n) = 1, n=0; x(n) = 0, n \neq 0.$$

На основании (1.4) имеем $X(z) = 1$. Эта функция сходится на всей z -плоскости, так как $x(n)$ является последовательностью конечной длины.

б. Единичный скачок

$$x(n) = 1(n) = 1, n \geq 0; x(n) = 0, n < 0.$$

Поскольку $x(n) = 0$ везде, кроме $n \geq 0$, где $x(n) = 1$, то

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}},$$

причем $X(z)$ сходится при $|z| > 1$, так как имеет единственный полюс $z = 1$.

в. Комплексная экспонента

$$x(n) = 0, n < 0; x(n) = e^{j\omega n}, n \geq 0.$$

Вычисляя z -преобразование, получим

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j\omega} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{j\omega}},$$

причем $X(z)$ сходится при $|z| > 1$, так как единственным полюсом $X(z)$ является $z = e^{j\omega}$.

г. Простая показательная последовательность

$$x(n) = 0, n < 0; x(n) = a^n, n \geq 0.$$

Подставив $x(n)$ в (1.4), получим

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Здесь $X(z)$ сходится при $|z| > a$, так как имеет только один полюс $z = a$.

1.4. Соотношение между z-преобразованием и Фурье-преобразованием последовательности

Z-преобразование последовательности можно рассматривать как способ ее однозначного представления в комплексной z-плоскости. Из определения (1.4) видно, что z-преобразование, вычисленное на единичной окружности, т. е. при $z = e^{j\omega}$, дает

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n},$$

что совпадает с преобразованием Фурье исходной последовательности (см. формулу (1.2)). Поэтому единичная окружность в z-плоскости играет существенную роль.

Обычным способом графического изображения информации, содержащейся в z-преобразовании, является задание особых точек — полюсов и нулей функции $X(z)$. Так, например, z-преобразование простой показательной последовательности может быть представлено следующим образом (рис. 1.3а).

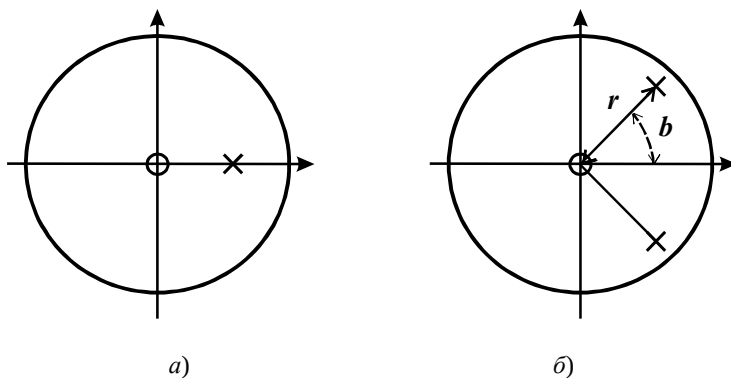


Рис. 1.3. Изображения z-преобразования:
а) простой показательной последовательности;
б) последовательности с парой комплексно сопряженных полюсов

Здесь и ниже крестиком изображен полюс, а кружком - нуль функции $X(z)$. С помощью такого изображения расположения нулей и полюсов, а также при использовании дополнительного предположения о физической реализуемости системы можно однозначно (с точностью до постоянного множителя) восстановить z -преобразование.

Пример. Найдём z -преобразование последовательности

$$x(n) = \begin{cases} \frac{r^n \sin[(n+1)b]}{\sin b}, & n \geq 0, \\ 0 & , n < 0. \end{cases}$$

Решение. Используя определение z -преобразования, получим

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left\{ \frac{\sin[(n+1)b]}{\sin b} \right\} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n z^{-n}}{\sin b} \left\{ \frac{e^{j(n+1)b} - e^{-j(n+1)b}}{2j} \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (rz^{-1}e^{jb})^n \frac{e^{jb}}{2j \sin b} - \sum_{n=0}^{\infty} (rz^{-1}e^{-jb})^n \frac{e^{-jb}}{2j \sin b} = \\ &= \frac{1}{2j \sin b} \left(\frac{e^{jb}}{1 - rz^{-1}e^{jb}} - \frac{e^{-jb}}{1 - rz^{-1}e^{-jb}} \right), \\ X(z) &= \frac{1}{1 - 2r(\cos b)z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Здесь $X(z)$ сходится при $|z| > r$. Расположение нулей и полюсов такой функции в z -плоскости показано на рис. 1.3б. Она имеет пару комплексно сопряженных полюсов в точках $z = re^{\pm jb}$ и двойной нуль при $z = 0$.

Как уже упоминалось, зная расположение нулей и полюсов функции $X(z)$, ее можно восстановить. Так, если известно, что функция $X(z)$ имеет N полюсов в точках $z = p_1, p_2, \dots, p_N$

и M нулей в точках $z=z_1, z_2, \dots, z_M$, то она может быть выписана в виде отношения произведений

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}, \quad (1.5)$$

где A – произвольная постоянная. Перемножив сомножители, получим, что наиболее общей формой $X(z)$ является дробно-рациональная функция от z^{-1} , т. е.

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}. \quad (1.6)$$

Полученное выражение часто используется при синтезе цепей.

1.5. Обратное z -преобразование

Важно уметь перейти не только от последовательности к ее z -преобразованию, но и обратно от z -преобразования к последовательности. Способ обратного перехода называется обратным z -преобразованием и формально определяется соотношением

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X(z) z^{n-1} dz. \quad (1.7)$$

В правой части этого равенства стоит контурный интеграл в z -плоскости по любому замкнутому контуру в области сходимости, охватывающему начало координат. Например, контуром интегрирования может быть окружность радиуса $C_1 > R_1$, где R_1 – радиус сходимости z -преобразования (т. е. предполагается, что последовательность $x(n)$ физически реализуема).

Обратное z -преобразование можно найти несколькими способами:

- 1) прямым вычислением интеграла (1.7) с использованием теоремы о вычетах;
- 2) разложением $X(z)$ на простые дроби;
- 3) обычным делением числителя $X(z)$ на его знаменатель;
- 4) разложением в степенной ряд.

Первый способ основан на известной теореме из теории функций комплексного переменного, утверждающей, что контурный интеграл (1.7) может быть вычислен непосредственно через вычеты

$$x(n) = \sum_{p_i} \operatorname{res} X(z) z^{n-1} \Big|_{p_i \text{ внутри } C_1} \quad (1.8)$$

Рассмотрим пример $X(z) = 1/(1-az^{-1})$. Из равенства (1.8) при $n \geq 0$ получим

$$x(n) = \operatorname{res} \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} \Big|_{p=a},$$

т. е. $x(n) = a^n$, $n \geq 0$. При $n < 0$ кратный полюс z -преобразования находится в точке $z=0$. Прямое вычисление вычета в полюсе $z=0$ дает $x(n)=0$ при $n < 0$.

При использовании второго способа z -преобразование записывают в виде дроби (1.5) и представляют суммой

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1-p_i z^{-1}}.$$

С учетом того, что каждое слагаемое $\alpha_i/(1-p_i z^{-1})$ имеет обратное z -преобразование вида $\alpha_i p_i^n$, получим

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Способы 3 и 4 рассматривать не будем. С ними можно познакомиться в пособиях по z -преобразованию.

1.6. Свойства z -преобразования

Z -преобразование весьма полезно при исследовании цифровых сигналов и линейных цепей. Чтобы полностью использовать его возможности, необходимо знать основные свойства z -преобразования, связанные с линейностью, задержкой последовательностей, сверткой, перемножением последовательностей, задержкой физически реализуемых последовательностей.

1.6.1. Линейность

Z -преобразование линейно. Это означает, что если $X_1(z)$ и $X_2(z)$ являются z -преобразованиями последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$, то при любых действительных a и b z -преобразование последовательности $ax_1(n) + bx_2(n)$ равно $aX_1(z) + bX_2(z)$.

1.6.2. Задержка

Если последовательность $x(n)$ имеет z -преобразование $X(z)$, то z -преобразование последовательности $x(n - n_0)$ при любых n_0 равно $z^{-n_0} X(z)$. Это свойство z -преобразования особенно полезно при переходе от представления линейной системы разностным уравнением к представлению ее z -преобразованием и наоборот.

1.6.3. Свертка последовательностей

Если $x(n)$ и $y(n)$ связаны зависимостью

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m),$$

то

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad (1.9)$$

где $X(z)$, $H(z)$ и $Y(z)$ являются соответственно z -преобразованиями последовательностей $x(n)$, $h(n)$ и $y(n)$. Таким образом, операция свертки последовательностей приводит к перемножению их z -преобразований.

Нетрудно заметить, что $H(z)$ можно выразить из соотношения (1.9) в виде

$$H(z) = Y(z)/X(z). \quad (1.10)$$

Равенство (1.9) важно как практическое средство, позволяющее без вычисления свертки найти выходную последовательность системы по ее импульсной характеристике (ИХ) и входной последовательности. Рассчитывая отклик $y(n)$ путем перемножения двух z -преобразований и вычисления обратного z -преобразования, часто удается свести сложную задачу к более простой.

1.6.4. Перемножение последовательностей

Если последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ имеют z -преобразования $X_1(z)$ и $X_2(z)$, то последовательность $x_3(n) = x_1(n)x_2(n)$ имеет z -преобразование:

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv. \quad (1.11)$$

В область сходимости $X_3(z)$ входят все z , для которых справедливо следующее условие: если некоторая точка v принадлежит области сходимости $X_1(z)$, то z/v принадлежит области сходимости $X_2(z)$. В формуле (1.11) контур интегрирования является замкнутой кривой, лежащей внутри пересечения областей сходимости функций $X_1(v)$ и $X_2(z/v)$.

Соотношение (1.11) называют теоремой о комплексной свертке, так как оно представляет z -преобразование произведения $[x_1(n) \times x_2(n)]$ в виде комплексной свертки z -преобразований соответствующих последовательностей. Воспользовавшись подстановками $z = e^{j\omega}$ и $v = e^{j\theta}$, выразим преобразование Фурье от произведения последовательностей через преобразование Фурье от каждой из них. Оно имеет вид

$$X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

и является широко известной сверткой двух преобразований Фурье. Это соотношение требуется при проектировании цифровых фильтров методом весовых функций.

1.6.5. Одностороннее z-преобразование. Задержка физически реализуемых последовательностей

При решении большинства практических задач обычно имеют дело с физически реализуемыми последовательностями, поэтому полезно ввести «одностороннее» z-преобразование, определяемое как

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}. \quad (1.12)$$

При этом предполагается, что поведение последовательности $x(n)$ до точки $n=0$ неизвестно и его можно не учитывать. Для многих последовательностей свойства одностороннего z-преобразования аналогичны свойствам обычного z-преобразования. Основным исключением является свойство, связанное со сдвигом (задержкой) последовательностей.

Рассмотрим, например, последовательность $x_1(n)$ с односторонним z-преобразованием $X_1(z)$ и задержанную последовательность $x_2(n) = x_1(n-1)$. Одностороннее z-преобразование от $x_2(n)$ равно

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n-1) z^{-n}.$$

Положив $m = n-1$, получим равенство

$$X_2(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m) z^{-m-1},$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$X_2(z) = z^{-1} \left[x_1(-1)z + \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)z^{-m} \right] = z^{-1} [X_1(z)] + x_1(-1). \quad (1.13)$$

Задержка на один отсчет по-прежнему приводит к умножению одностороннего z -преобразования на z^{-1} , но при этом необходимо учесть значения последовательности $x_1(n)$ при $n < 0$, т. е. важную роль начинают играть начальные условия.

В качестве другого примера рассмотрим z -преобразование последовательности $x_2(n) = x_1(n-2)$, равное

$$X_2(z) = z^{-2} [X_1(z)] + x_1(-2) + x_1(-1)z^{-1}. \quad (1.14)$$

Из выражений (1.13) и (1.14) можно получить формулу для случая задержки последовательности на произвольное число n_0 отсчетов ($n_0 > 0$). Она имеет вид

$$X_2(z) = z^{-n_0} [X_1(z)] + x_1(-n_0) + x_1(-n_0+1)z^{-1} + \dots + x_1(-1)z^{-n_0+1},$$

причем $x_2(n) = x_1(n-n_0)$.

1.7. Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим периодическую последовательность $x_p(n)$ с периодом N , т. е. $x_p(n) = x_p(n+kN)$ для любого целого значения k . Такие последовательности не могут быть представлены z -преобразованием, так как не существует ни одного значения z , для которого бы сходилось z -преобразование такой последовательности. Однако их можно представить рядом Фурье, т. е. суммой синусоидальных и косинусоидальных последовательностей с частотами, кратными основной частоте $2\pi/N$ периодической последовательности.

В противоположность рядам Фурье непрерывных периодических функций здесь достаточно только N различных комплексных экспонент с периодом, равным целой части основного периода N . Это является следствием того, что комплексная экспонента

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (1.15)$$

периодична по k с периодом N . Так, $e_0(n) = e_N(n)$, $e_1(n) = e_{N+1}(n)$ и так далее.

Следовательно, множество N комплексных экспонент (1.15) с $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ определяет все различные комплексные экспоненты с частотами, кратными $\frac{2\pi}{N}$. Поэтому представление периодической последовательности $x_p(n)$ рядом Фурье содержит только N этих комплексных экспонент и, следовательно, имеет вид

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (1.16)$$

Множитель $\frac{1}{N}$ введён для удобства и не влияет на характер представления.

Чтобы выразить коэффициенты $X_p(k)$ через $x_p(n)$, умножим обе части равенства (1.16) на $e^{-j(2\pi/N)mn}$ и просуммируем результаты по n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}.$$

Меняя в правой части этого выражения порядок суммирования и используя формулу

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-m)} = \begin{cases} N, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases} \quad (1.17)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \delta(k-m) = X_p(m)$$

или (после перестановки левой и правой частей этого равенства и замены индекса m на k)

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (1.18)$$

Соотношение (1.18) носит название дискретного преобразования Фурье (ДПФ), а (1.16) – обратного ДПФ (ОДПФ).

1.7.1. Связь между дискретным преобразованием Фурье и z-преобразованием

Из определений (1.16) и (1.18) видно, что обе последовательности $x_p(n)$ и $X_p(k)$ периодичны с периодом в N отсчетов. Ясно также (см. (1.18)), что $X_p(k)$ полностью определяется одним периодом $x_p(n)$. Отсюда возникает интересный вопрос: как связаны z -преобразование конечной последовательности, образованной из одного периода периодической последовательности, и ДПФ всей периодической последовательности? Иначе говоря, рассмотрим последовательность конечной длины

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } n, \end{cases} \quad (1.19)$$

причем последовательность $x_p(n)$ имеет период в N отсчетов, т. е. $x(n)$ представляет собой один период периодической последовательности $x_p(n)$. Z -преобразование $x(n)$ равно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}.$$

Вычисляя эту сумму при $z = e^{j(2\pi/N)k}$, т. е. в точке на единичной окружности с полярным углом $2\pi k/N$, находим

$$X(z) \Big|_{z = e^{j \frac{2\pi}{N} k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}.$$

Сравнивая последнюю сумму с (1.18) и учитывая, что $x_p(n)=x(n)$ на интервале $0 \leq n \leq N-1$, получаем

$$X_p(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}).$$

Итак, коэффициенты ДПФ всей периодической последовательности равны значениям z -преобразования последовательности конечной длины в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности.

Для иллюстрации приведенных положений рассмотрим периодическую последовательность с периодом N (рис. 1.4а), определяемую как

$$x_p(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

$$x_p(n+mN) = x_p(n), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Согласно определению (1.18), ее ДПФ равно

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \right)^n = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j\frac{2\pi}{N}k}},$$

$$0 \leq k \leq N-1.$$

Модули и фазы элементов последовательности $X_p(k)$ для случая $a=0.9$, $N=16$ изображены на рис. 1.4б.

Последовательность конечной длины $x(n)$ (рис. 1.4в) определяется как

$$x(n) = \begin{cases} a^n & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{при других } n \end{cases},$$

т. е. она состоит из одного периода последовательности $x_p(n)$. Ее z -преобразование равно

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - a z^{-1}}.$$

Вычисляя $X(z)$ на единичной окружности, получим

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^N e^{-j\omega N}}{1 - a e^{-j\omega}}.$$

Модуль и фаза этой функции для $0 \leq \omega \leq 2\pi$ изображены на рис.1.4з. Значения $X_p(k)$ и $X(e^{j\omega})$ в точках $\omega_k = 2\pi k/N$ совпадают.

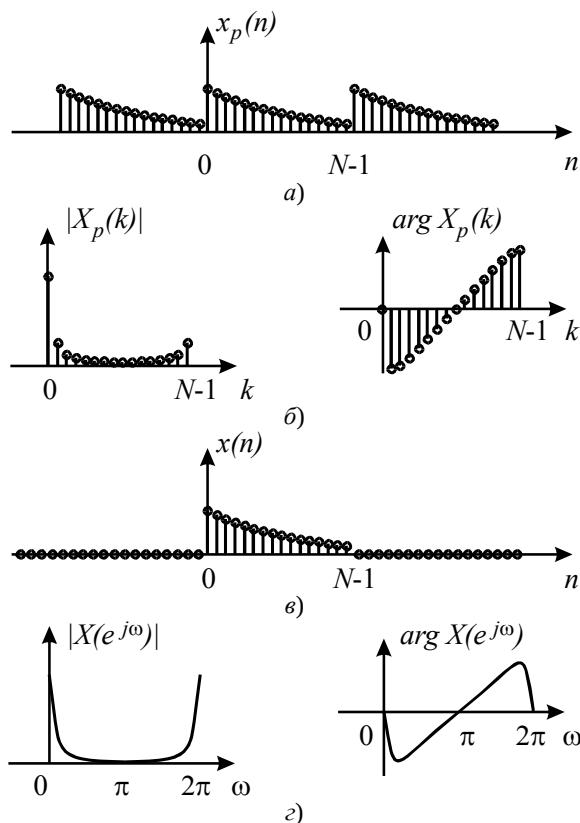


Рис. 1.4. Связь между ДПФ и Z-преобразованием:

- а) последовательность с периодом N ; б) модули и фазы элементов последовательности $X_p(k)$; в) последовательность конечной длины; г) модуль и фаза функции $X(z)$ на единичной окружности

Найдем z -преобразование последовательности конечной длины через коэффициенты ДПФ периодической последовательности. Из соотношений (1.16), (1.19) и определения z -преобразования получаем

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \end{aligned}$$

Вычисляя $X(z)$ на единичной окружности, получим

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^N e^{-j\omega N}}{1 - a e^{-j\omega}}.$$

Это равенство показывает, что z -преобразование последовательности непосредственно связано с коэффициентами её ДПФ. Для точек на единичной окружности оно принимает вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \frac{e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{e^{-j\omega \frac{\pi k}{N}} \sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)},$$

где функции вида $\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)/\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)$ интерполируют значения коэффициентов ДПФ $X_p(k)$ на всю ось частот. Следовательно, с помощью последней формулы по коэффициентам ДПФ последовательности конечной длины можно найти ее непрерывный частотный спектр.

1.7.2. Дискретное преобразование Фурье последовательностей конечной длины

Из выражений (1.18) и (1.19) следует, что коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины однозначно представляют саму последовательность, так как по ним можно точно восстановить исходную последовательность, используя ОДПФ. Итак, хотя ДПФ и ОДПФ вводятся для периодических последовательностей, важно, что через них можно представлять последовательности конечной длины.

Представление конечных последовательностей с помощью ДПФ удобно также для получения значений преобразования Фурье в L точках, равномерно распределенных на единичной окружности. Для получения требуемого частотного разрешения L может быть выбрано значительно большим, чем N .

Рассмотрим конечную последовательность $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$ с z -преобразованием на единичной окружности

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}.$$

Вычисляя $X(e^{j\omega})$ на частотах $\omega_l = (2\pi/L)l$, $l=0,1,\dots,L-1$, получим

$$X(e^{j\frac{2\pi}{L}l}) = \sum_{n=0}^N x(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}nl}. \quad (1.20)$$

Введем новую последовательность $\hat{x}(n)$ длины L точек ($L > N$):

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

и найдем ее L -точечное ДПФ:

$$\hat{X}(z) = \sum_{n=0}^{L-1} \hat{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{L}nl}.$$

Поскольку $\hat{x}(n)=0$ при $n \geq N$, это равенство можно записать в виде

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{L} nk}. \quad (1.21)$$

Сравнивая (1.21) и (1.20), получим

$$\hat{X}(k) = X(e^{j \frac{2\pi}{L} k}).$$

Таким образом, простое дополнение последовательности конечной длины нулевыми отсчетами позволяет достичь любого разрешения при расчете преобразования Фурье этой последовательности для совокупности точек, равномерно распределенных по единичной окружности. (Вместе с тем следует иметь в виду, что частотное разложение зависит только от длительности сигнала N . Выбор $L > N$ лишь улучшает условия различения синусоидальных компонент). При спектральном анализе конечных последовательностей эта несложная операция является одной из наиболее полезных.

Итак, было показано, что ДПФ однозначно представляет последовательность конечной длины, содержащую N элементов, причем коэффициенты ДПФ равны значениям z -преобразования последовательности в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности. Аналогично z -преобразование любой (в том числе и бесконечной) последовательности однозначно представляет эту последовательность.

1.7.3. Эффекты наложения

Рассмотрим, какая получится последовательность, если в качестве коэффициентов ДПФ взять значения z -преобразования произвольной последовательности, вычисленного в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности.

Для большей ясности предположим, что последовательность $x(n)$ (не обязательно конечная) имеет z -преобразование

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Определим набор коэффициентов ДПФ как

$$X_p(k) = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (1.22)$$

По этим коэффициентам можно найти периодическую последовательность $x_p(n)$, равную

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Подставляя значения коэффициентов (1.22) в последнюю формулу и заменяя индекс суммирования на m , получим

$$\begin{aligned} x_p(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(m-n+rN), \\ x_p(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-rN). \end{aligned}$$

Это соотношение является весьма важным. Оно показывает, что периодическая последовательность, получаемая из ОДПФ набора значений z -преобразования непериодической последовательности, вычисленных в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности, состоит из сдвинутых и наложенных копий исходной непериодической последовательности. Если длина последовательности $x(n)$ не