

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ
ЯРГУ
2013

УДК 519.87(075.8)

В183.4я73

Г 55

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2013 учебного года*

Рецензенты:

Проказников А. В., доктор физико-математических наук, профессор;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Глызин, Сергей Дмитриевич.

Г 55 Релаксационные автоколебания в нейронных системах:
учебное пособие / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос.
ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 220 с.
ISBN 978-5-8397-0941-6

В учебном пособии изложена теория релаксационных колебаний для специального класса уравнений с запаздываниями, моделирующими электрическую активность нервных клеток.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.68 Прикладная математика и информатика (дисциплины „Асимптотические методы нелинейной динамики“ и „Непрерывные математические модели“, цикл М1), очной формы обучения, а также может быть полезно для студентов других математических и физических специальностей.

Рис. 12. Библиогр.: 43 назв.

УДК 519.87(075.8)

ББК В183.4я73

ISBN 978-5-8397-0941-6

© ЯрГУ, 2013

Оглавление

Введение	6
1. Релаксационные автоколебания в нейронных системах с одним запаздыванием	11
1.1. Асимптотический анализ одного уравнения	11
1.1.1. Постановка задачи	11
1.1.2. Основной результат	13
1.1.3. Существование периодического решения	16
1.1.4. Анализ свойств устойчивости	29
1.1.5. Асимптотика периода решения. Формула поправки .	31
1.2. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов	32
1.2.1. Постановка задачи	33
1.2.2. Основные теоремы	34
1.2.3. Обоснование C -сходимости	38
1.2.4. Доказательство C^1 -сходимости	55
1.3. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов	59
1.3.1. Описание объекта исследования	59
1.3.2. Базовая теорема	60
1.3.3. Анализ предельного отображения	63
1.3.4. Обоснование теоремы 1.6	66
1.3.5. Заключительные замечания	80
2. Исследование релаксационных автоколебаний в случае двух запаздываний	84
2.1. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах . .	84

2.1.1.	Введение	85
2.1.2.	Формулировка результата	87
2.1.3.	Доказательство существования bursting-цикла	91
2.1.4.	Анализ свойств устойчивости	101
2.2.	Дискретные автоволны в нейронных системах	104
2.2.1.	Введение	104
2.2.2.	Основные результаты	106
2.2.3.	Доказательство теоремы 2.4	112
2.2.4.	Заключение	126
2.3.	Буферность в нейронных системах	127
2.3.1.	Локальная постановка задачи	127
2.3.2.	Метод квазинормальных форм	130
2.3.3.	Численный анализ одного примера	134
3.	Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием	135
3.1.	Введение	135
3.2.	Релаксационные автоколебания в математической модели отдельного нейрона	137
3.2.1.	Описание результата	137
3.2.2.	Доказательство существования релаксационного цикла	141
3.2.3.	Анализ свойств устойчивости	150
3.3.	Релаксационные автоколебания в кольцевой нейронной сети	154
3.3.1.	Общая схема исследования	154
3.3.2.	Анализ вспомогательного нелинейного уравнения	157
3.3.3.	Доказательство теоремы 3.2	161
3.3.4.	Анализ вспомогательного линейного уравнения	168
3.3.5.	Итоговые результаты	171
3.4.	Заключение	176
4.	Об одном способе математического моделирования химических синапсов	186
4.1.	Постановка задачи	186
4.2.	Общая схема исследования	190
4.3.	Вспомогательное нелинейное уравнение	193

4.4. Обоснование теоремы 4.1	197
4.5. Вспомогательное линейное уравнение	204
4.6. Основные результаты	207

Заключение	215
-------------------	------------

Литература	216
-------------------	------------

Введение

Моделирование динамики изменения электрического потенциала нервных клеток связано, в первую очередь, с работами А. Л. Ходжкина и А. Ф. Хаксли [1, 2]. Этим авторам в статье [2] впервые удалось представить феноменологическую модель, полученную на основе соотношений балансного типа, так, что ее динамика при надлежащем выборе параметров обладает основными качественными свойствами, характерными для наблюдаемых в эксперименте нервных клеток.

Модель Ходжкина–Хаксли довольно сложна и содержит большое количество параметров, зависимость от которых весьма значительна. Вместе с тем следует отметить, что во многих случаях уравнение Ходжкина–Хаксли дает вполне удовлетворительное количественное соответствие экспериментальным данным.

С момента появления модели Ходжкина–Хаксли предпринимались многочисленные попытки ее упрощения с сохранением основных эффектов, характерных для динамики нейронов. В суммирующих статьях [3, 4] приведен ряд критериев, которым должна удовлетворять модель импульсного нейрона, и перечислено большое число модельных систем. Естественно, что наиболее простые из них удовлетворяют далеко не всем требованиям. Среди этих требований наиболее важным является условие существования у модели устойчивого периодического режима импульсного типа. Таким условиям удовлетворяет, в частности, предложенная в [14] модель с запаздыванием

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1))] u. \quad (0.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, функции $f_{\text{Na}}(u)$ и $f_{\text{K}}(u)$ характеризуют проводимости ионных каналов. Данная задача легко обобщается в сторону добавления слагаемых, отвечающих за проводимость других ионных каналов и добавления в моделируемые токи добавочных запаздываний. Наиболее плодот-

творным, с нашей точки зрения, оказался учет еще одного запаздывания в уравнении (0.1).

Для модификации модели одиночного импульсного нейрона (0.1) воспроизведем ход рассуждений из [14], приводящий к данному уравнению. В первую очередь отметим, что в [14] во внимание принимаются только калиевые и натриевые токи, в качестве начала отсчета принимается уровень наибольшей поляризации мембраны и отклонение потенциала от этого уровня обозначается $u(t)$. Уравнение баланса токов при условии пренебрежения токами утечки записывается в виде:

$$C\dot{u} = I_{Na} + I_K. \quad (0.2)$$

Далее предполагается, что токи I_{Na} и I_K можно представить следующим образом:

$$I_{Na} = \chi_{Na}(u) \cdot u, \quad I_K = \chi_K(u) \cdot u, \quad (0.3)$$

где $\chi_{Na}(u)$ $\chi_K(u)$ — гладкие функции, определяющие натриевую и калиевую проводимости.

Обратимся к анализу зависимости $\chi_{Na}(u)$. В состоянии сильной поляризации ($u \ll 1$) на внутренней поверхности мембраны наблюдается избыток ионов натрия. Работа ионных насосов состоит в их откачивании из клетки (см. [2]). В силу положительности заряда ионов натрия данный процесс уменьшает мембранный потенциал, поэтому $\chi_{Na}(u) < 0$ при $u \ll 1$. С другой стороны, спайк связан с током положительных ионов натрия внутрь клетки, что приводит к росту величины u . Таким образом, при значении u выше некоторого уровня проводимость $\chi_{Na}(u) > 0$. Далее следует состояние электрохимического равновесия $u_{Na} \gg 1$ для ионов натрия: $\chi_{Na}(u_{Na}) = 0$. В результате получаем вид зависимости (см. [14]) проводимости $\chi_{Na}(u)$, который изображен на рис. 0.1 а.

Перейдем к обсуждению зависимости калиевой проводимости от мембранного потенциала. В книге [14] принята гипотеза о том, что она запаздывает по отношению к текущему значению мембранного потенциала. Примем это запаздывание за единицу времени и будем считать, что $\chi_K = \chi_K(u(t-1))$.

В состоянии сильной поляризации поток ионов калия направлен внутрь клетки, что способствует росту мембранного потенциала, а поэтому $\chi_K(u) > 0$ при $u \ll 1$. После прохождения максимума пика потенциала действия поток ионов калия меняет свое направление. Таким образом, существует такой уровень, что при значении $u(t-1)$ выше него проводимость $\chi_K(u(t-1)) < 0$. Суммируя данные рассуждения, приходим к виду зависимости $\chi_K(u)$, изображенному на рис. 0.1 б.

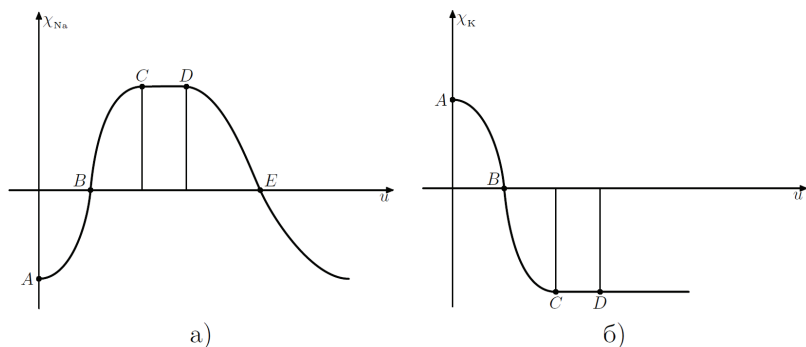


Рис. 0.1. Вид кривых натриевой (а) и калиевой (б) проводимостей (воспроизводится по книге [14])

Предсказать более детально вид кривых $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ затруднительно, отметим лишь, что в состоянии сильной поляризации мембранный потенциал медленно растет, поэтому

$$\chi_{Na}(0) + \chi_K(0) > 0. \quad (0.4)$$

Методы, используемые далее, позволяют исследовать модели для широкого класса нелинейностей, и описанных свойств зависимостей оказывается вполне достаточно для асимптотического анализа.

Для упрощения зависимости $\chi_{Na}(u)$ в книге [14] указывается на то, что участки относительной стабилизации проводимостей $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ (участки CD графиков) достаточно велики, и на этом основании предполагается, что в процессе функционирования нейрона задействован лишь участок AD кривой $\chi_{Na}(u)$. В связи с этим ниспадающий участок DE игнорируется. Введение обозначений

$$\begin{aligned} \chi_{Na}(u) &= a - (b - a)f_{Na}(u), & \chi_K(u) &= (b - a)f_K(u) - b, \\ \lambda &= h(b - a) > 0, \end{aligned} \quad (0.5)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ — константы, характеризующие установившиеся значения $\chi_{Na}(u)$ и $\chi_K(u)$ на промежутке CD, а $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ — достаточно гладкие функции, имеющие нулевые пределы при $u \rightarrow \infty$, позволяет перейти к модели (0.1), которая и изучается в первой части нашего пособия.

Существенное обобщение модели (0.1) может быть получено за счет учета запаздывания и ниспадающего участка в функции проводимости

натриевого канала. Вернемся к виду функции $\chi_{\text{Na}}(u)$, приведенной на рис. 0.1 а, и предположим, что она представима в следующем виде:

$$\chi_{\text{Na}}(u) = \chi_{\text{Na}}^{(1)}(u) + \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u), \quad (0.6)$$

где

$$\chi_{\text{Na}}^{(1)}(0) < 0, \quad \chi_{\text{Na}}^{(2)}(0) = 0, \quad (0.7)$$

$$\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u) = a_1 + O(1/u), \quad \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u) = -a_2 + O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \quad (0.8)$$

Относительно функции $\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u)$ будем предполагать, что она достаточно мала по модулю на участке AD графика 0.1 а, кроме того, считаем, что $a_1, a_2 > 0$ $a_1 - a_2 < 0$. Предположим, наконец, что в натриевом канале также учитывается запаздывание, иначе говоря, натриевая проводимость записывается в виде $\chi_{\text{Na}}(u(t - h))$, где $0 < h < 1$.

В этом случае в соответствии с (0.2), (0.3) приходим к уравнению

$$c\dot{u} = [\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u(t - h)) + \chi_{\text{Na}}^{(2)}(u(t - h)) + \chi_{\text{K}}(u(t - 1))]u. \quad (0.9)$$

Нетрудно видеть, что модель (0.9) сводится к уравнению (0.1) при $h = 0$ и отброшенном слагаемом $\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u)$ (соответствует отбрасыванию участка DE зависимости $\chi_{\text{Na}}(u)$). С другой стороны, при условии, что у функции $\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u)$ разница между значениями в нуле и на бесконечности относительно мала и соответствующий ей ток не учитывается, получается модель, обладающая более богатой динамикой, чем (0.1). Кроме того, что особенно важно, эта модель может иметь импульсные режимы, в том числе и пакеты импульсов. Для формирования модельного уравнения не будем учитывать в (0.9) слагаемое $\chi_{\text{Na}}^{(1)}(u)$ и обозначим

$$\chi_{\text{Na}}^{(2)}(u) = \chi_{\text{K}}(0)(f(u) - 1), \quad \chi_{\text{K}}(u) = \chi_{\text{K}}(0)(1 - g(u)), \quad \lambda = \chi_{\text{K}}(0)/c, \quad (0.10)$$

тогда от уравнения (0.9) приходим к

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t - h)) - g(u(t - 1))]u. \quad (0.11)$$

Здесь $u(t) > 0$ – по-прежнему мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Относительно фигурирующих в (0.11) функций

$f(u), g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \quad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad uf'(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u), \quad ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (0.12)$$

где $a_0 = 1 + a_2/\chi_K(0)$, $b_0 = 1 + b/\chi_K(0)$ – положительные константы, а число $-b$ представляет собой предельное значение функции $\chi_K(u)$ при $u \rightarrow +\infty$. Типовыми примерами таких функций являются

$$f(u) = (1 - u)/(1 + c_1u), \quad g(u) = c_2u/(1 + u), \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0. \quad (0.13)$$

Основные результаты, представленные в предлагаемой работе, касаются релаксационных свойств уравнений (0.1), (0.11) и систем связанных уравнений такого типа.

Опишем структуру пособия. В первой главе формулируется общий подход к асимптотическому интегрированию уравнения (0.1) и обосновывается существование и устойчивость его релаксационных циклов. Затем во второй части главы рассматривается цепочка связанных осцилляторов вида (0.1). Связь в этом случае предполагается диффузионной. При подходящих значениях параметров в цепочке из m элементов удастся доказать сосуществование не менее m релаксационных циклов.

Импульсные нейроны, наблюдаемые в эксперименте, в некоторых случаях генерируют импульсные пакеты, это явление обычно называется *bursting*. Уравнение (0.1) не обладает таким свойством, однако учет запаздывания в обеих функциях проводимости позволяет перейти к модели (0.11), имеющей релаксационный *bursting* цикл. Вторая глава посвящена анализу уравнения с двумя запаздываниями, в ней излагается механизм возникновения *bursting* цикла. Наряду с этим удастся показать, что в системе из m связанных генераторов при подходящем выборе параметров сосуществует сколь угодно большое число устойчивых *bursting* циклов.

В третьей главе методы, разработанные для моделей (0.1), (0.11), применяются к сетям Хопфилда с запаздыванием. Для таких сетей получены результаты, аналогичные найденным в главах 1, 2 для моделей (0.1), (0.11).

Наконец, в последней, четвертой, части работы приведена модель синаптической связи между нейронами.

Глава 1.

Релаксационные автоколебания в нейронных системах с одним запаздыванием

1.1. Асимптотический анализ одного уравнения

В первую очередь рассмотрим скалярное сингулярно возмущенное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием (0.1), являющееся моделью отдельного нейрона. В данной главе изучаются вопросы существования, асимптотики и устойчивости его релаксационного цикла.

1.1.1. Постановка задачи

Основой излагаемых ниже построений служит теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, берущая начало с работы Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [5]. Последующее развитие этой теории отражено в работах [6–9], а достаточно законченный характер она приняла в монографиях [10, 11]. Уместно также отметить монографию [12] и работу [13], в которых основные идеи и методы из [10, 11] перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием.

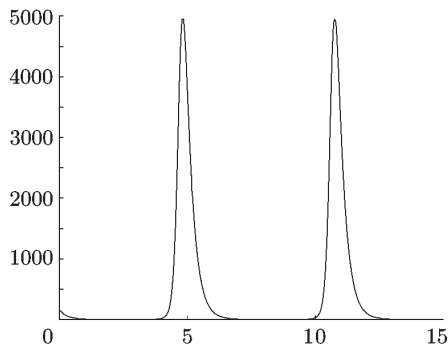


Рис. 1.1.

Результаты настоящей работы представляют собой естественное продолжение начатых в [12, 13] исследований.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. Будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона моделируется уравнением (0.1) (см. [14], с. 32), выпишем его и предположения, его касающиеся, заново

$$\dot{u} = \lambda[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u)]u. \quad (1.1)$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметры $\alpha, \beta > 0$, имеющие порядок единицы, таковы, что

$$\alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Предполагаем, что фигурирующие в (1.1) функции $f(u)$, $g(u)$ принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, и обладают свойствами

$$\begin{aligned} f(0) = g(0) = 1, \quad 0 < \beta g(u) + 1 < \alpha \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), uf'(u), ug'(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Как будет показано ниже, при сформулированных ограничениях и при всех достаточно больших λ уравнение (1.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1) \quad (1.4)$$

(положительность величины T_0 вытекает из неравенства (1.2)). Функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени длины периода имеет асимптотически высокий

всплеск длины α , а в остальное время асимптотически мала. Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла дает его график на плоскости (t, u) в случае $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\lambda = 3.5$, $f = g = (u + 1)/(u^2 + 1)$, изображенный на рис. 1.1.

1.1.2. Основной результат

При исследовании вопроса о существовании и устойчивости у уравнения (1.1) релаксационного цикла $u_*(t, \lambda)$ с требуемыми свойствами удобно сделать в (1.1) замену $u = \exp(\lambda x)$. Указанная замена преобразует уравнение (1.1) к виду

$$\dot{x} = -1 + \alpha F(x(t-1), \varepsilon) - \beta G(x, \varepsilon), \quad (1.5)$$

где $F(x, \varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon))$, $G(x, \varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, заметим, что в силу свойств (1.3) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(x, \varepsilon) = R(x), \quad R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

позволяющие перейти от уравнения (1.5) к рассмотрению предельного релейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -1 + \alpha R(x(t-1)) - \beta R(x). \quad (1.7)$$

Как и в работе [13], дадим пошаговое конструктивное определение понятия решения уравнения (1.7). Для этого зафиксируем некоторое

$$\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad (1.8)$$

рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1) \quad (1.9)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (1.7) с начальной функцией (1.9).

Заметим сразу, что поскольку $\varphi(t-1) < 0$ при $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, то по крайней мере при значениях t , достаточно близких к $-\sigma_0$, в силу

(1.6), (1.7) функция x_φ определяется из задачи Коши $\dot{x} = \alpha - \beta - 1$, $x(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = (\alpha - \beta - 1)t. \quad (1.10)$$

Ясно также, что до тех пор, пока $x_\varphi(t)$ или $x_\varphi(t - 1)$ не сменит знак, правая часть уравнения (1.7) меняться не будет. А отсюда в свою очередь заключаем, что формула (1.10) сохраняется на промежутке $t \in [-\sigma_0, 0)$.

При $t = 0$ первый раз происходит переключение, обусловленное сменой знака у $x_\varphi(t)$, и при $t \geq 0$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши $\dot{x} = \alpha - 1$, $x(0) = 0$, т. е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = (\alpha - 1)t. \quad (1.11)$$

Точнее говоря, формула (1.11) остается в силе пока $x_\varphi(t-1) < 0$, $x_\varphi(t) > 0$, т. е. до момента времени $t = 1$.

При $t = 1$ происходит очередное переключение, связанное теперь со сменой знака $x_\varphi(t - 1)$, и при $t \geq 1$ для нахождения x_φ имеем задачу Коши $\dot{x} = -1$, $x(1) = \alpha - 1$. Тем самым на промежутке $t \in [1, \alpha)$ получаем равенство

$$x_\varphi(t) = \alpha - t. \quad (1.12)$$

В точке $t = \alpha$ решение $x_\varphi(t)$ снова меняет знак, и поэтому при $t \geq \alpha$ рассмотрению подлежит уравнение $\dot{x} = -1 - \beta$ с нулевым начальным условием при $t = \alpha$. А отсюда нетрудно вывести, что на промежутке $t \in [\alpha, \alpha + 1)$ интересующее нас решение задается формулой

$$x_\varphi(t) = -(1 + \beta)(t - \alpha). \quad (1.13)$$

При $t \geq \alpha + 1$ снова, как и на начальном этапе, функции $x_\varphi(t)$ и $x_\varphi(t - 1)$ становятся отрицательными. Поэтому на промежутке $t \in [\alpha + 1, T_0)$, где величина T_0 определена в (1.4), решение $x_\varphi(t)$ имеет аналогичный (1.10) вид

$$x_\varphi(t) = (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta. \quad (1.14)$$

Завершая описание построения решения $x_\varphi(t)$, отметим, что в силу условия (1.8) на постоянную σ_0 функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит исходному начальному множеству (1.9). А это означает, что при $t \geq T_0 - \sigma_0$ весь процесс повторяется. Более того, из формул (1.10)–(1.14) вытекает, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (1.9)

при $t \geq -\sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией (рис. 1.2)

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha) & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $x_0(t + T_0) \equiv x_0(t)$.

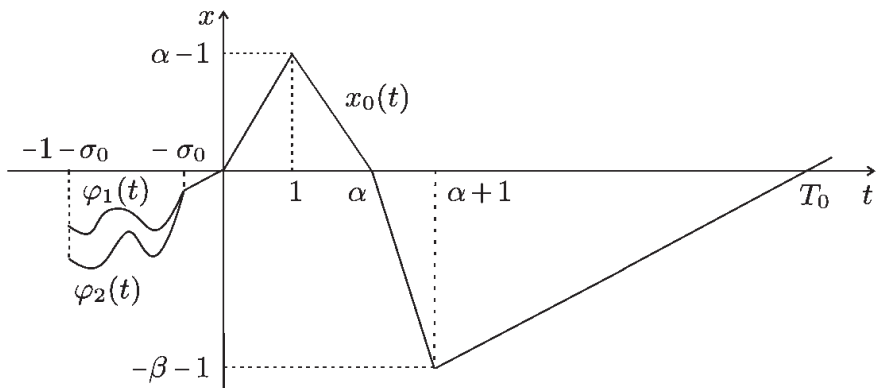


Рис. 1.2.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (1.5) и (1.7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (1.5) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (1.16)$$

Доказательство, содержащееся в следующих двух пунктах, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 (см. (1.8)) зафиксируем произвольно постоянные $q_1 > \sigma_0(\alpha - \beta - 1)$, $q_2 \in (0, \sigma_0(\alpha - \beta - 1))$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1). \quad (1.17)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (1.5) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1)$ (если он существует). И наконец, на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ зададим оператор Π_ε с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (1.18)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (1.18) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

1.1.3. Существование периодического решения

Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq$

$$\sigma_0 < 1/2. \quad (1.19)$$

Так как в силу (1.19) его длина не превосходит единицы, то в этом случае $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ и, следовательно, на указанном отрезке $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 - \beta G(x, \varepsilon) + \alpha F(\varphi(t - 1), \varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1). \quad (1.20)$$

При асимптотическом исследовании задачи (1.20) существенным является то обстоятельство, что в силу неравенств из (1.17) и свойств (1.3) равномерно по $t \in [-\sigma_0, \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ имеем

$$F(\varphi(t - 1), \varepsilon) = 1 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (1.21)$$

Подставим, далее, соотношение (1.20) в (1.20), отбросим экспоненциально малое по ε (т. е. имеющее порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) слагаемое и в получившемся уравнении для x выполним замены $x = \varepsilon v(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. В результате приходим к не зависящему от ε модельному скалярному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta g(\exp v), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (1.22)$$

В дальнейшем нас будет интересовать специальное решение $v_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, уравнения (1.22), задающееся равенством

$$v_0(\tau) = V^{-1}(z)|_{z=(\alpha-\beta-1)\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

где $V^{-1}(z)$ – функция, обратная к

$$V(z) = z - \int_{-\infty}^z \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Подчеркнем, что определение (1.23) корректно, поскольку условия (1.3) гарантируют как выполнение неравенства $\alpha - 1 - \beta g(\exp s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$ и сходимость несобственного интеграла из (1.24), так и справедливость свойств $V'(z) = (\alpha - 1 - \beta)/(\alpha - 1 - \beta g(\exp z)) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$, $V(z) \rightarrow \pm\infty$ при $z \rightarrow \pm\infty$. А отсюда в свою очередь вытекает существование обратной функции $V^{-1}(z)$ при всех $z \in \mathbb{R}$.

Остановимся на асимптотическом поведении функции (1.23) при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Для этого выясним сначала характер поведения функций $V(z)$ и $V^{-1}(z)$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Обращаясь в очередной раз к свойствам (1.3), из равенства (1.24) последовательно выводим:

$$V(z) = z + O(\exp z), \quad V^{-1}(z) = z + O(\exp z), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.25)$$

Для получения же аналогичных (1.25) формул при $z \rightarrow +\infty$ представим $V(z)$ в виде

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} z - \int_{-\infty}^0 \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds - \\ &\quad - \int_0^z \left(\frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} - \frac{\beta}{\alpha - 1} \right) ds = \\ &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} (z - c_0) - \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} \int_z^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} \int_{-\infty}^0 \frac{\beta(1 - g(\exp s))}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\beta g(\exp s)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp s)} ds = \\ &= \frac{(\alpha - 1)\beta}{\alpha - \beta - 1} \int_0^1 \frac{1 - g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du - \beta \int_1^{+\infty} \frac{g(u)}{u(\alpha - 1 - \beta g(u))} du. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Остается заметить, что из соотношений (1.26), (1.27) требуемые асимптотические представления

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - 1} (z - c_0) + O(\exp(-z)), \\ V^{-1}(z) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} z + c_0 + O\left(\exp\left(-\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} z\right)\right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

при $z \rightarrow +\infty$ вытекают уже очевидным образом.

Суммируя проделанные построения и объединяя формулы (1.23), (1.25), (1.28), приходим к выводу, что интересующие нас асимптотические равенства для $v_0(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} v_0(\tau) &= (\alpha - \beta - 1)\tau + O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ v_0(\tau) &= (\alpha - 1)\tau + c_0 + O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Как оказывается, функция (1.23) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (1.20). А именно убедимся в том, что решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ этой задачи допускает представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=t/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0, \quad (1.30)$$

где через $\Delta_{1,\varphi}$, $\Delta_{2,\varphi}$, ..., здесь и ниже обозначаются остатки, имеющие экспоненциальный по ε порядок малости равномерно по φ , t .

Подставляя соотношение (1.30) в (1.20), для отыскания $\Delta_{1,\varphi}$ получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{1,\varphi} &= -\beta[g(\exp(v_0(t/\varepsilon) + \Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))] + \\ &+ \alpha(F(\varphi(t-1), \varepsilon) - 1), \quad \Delta_{1,\varphi}|_{t=-\sigma_0} = \delta(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\delta(\varepsilon) = -\sigma_0(\alpha - \beta - 1) - \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}$. Помимо равенства (1.20), ее анализ основывается на следующих двух фактах. Во-первых, в силу первого

асимптотического представления из (1.29) имеем

$$\delta(\varepsilon) = O(\exp(-(\alpha - \beta - 1)\sigma_0/\varepsilon)); \quad (1.32)$$

во-вторых, из условий (1.3) вытекает, что

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(u_1^2, u_2^2)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (1.33)$$

где $M_1 = \sup_{u \in \mathbb{R}_+} (1 + u^2)|g'(u)| < \infty$.

Предположим сначала, что на интересующем нас отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$ выполняется априорная оценка

$$|\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| \leq M_2 \varepsilon \quad (1.34)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от t, φ, ε) константой $M_2 > 0$. Отсюда и из неравенства (1.33) нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} |g(\exp(v_0(t/\varepsilon) + \Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - g(\exp v_0(t/\varepsilon))| &\leq \\ &\leq \frac{M_3}{\varepsilon} \exp(-|v_0(t/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)|, \end{aligned} \quad (1.35)$$

при $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$, где постоянная $M_3 > 0$ зависит от M_2 из (1.34), но не зависит от t, φ, ε .

Последующий способ действий стандартен. Сначала переходим обычным образом от (1.31) к соответствующему интегральному уравнению, из которого в свою очередь с учетом неравенства (1.35) получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| &\leq |\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1), \varepsilon) - 1| ds + \\ &+ \frac{M_3}{\varepsilon} \int_{-\sigma_0}^t \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(s, \varepsilon)| ds. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Далее, применяя к (1.36) лемму Гронуолла–Беллмана и используя известные свойства (1.20), (1.32), убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} |\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| &\leq \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1), \varepsilon) - 1| ds \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{M_3}{\varepsilon} \int_{-\sigma_0}^t \exp(-|v_0(s/\varepsilon)|) ds \right\} \leq \left(|\delta(\varepsilon)| + \alpha \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} |F(\varphi(s-1), \varepsilon) - 1| ds \right) \times \\ &\times \exp \left\{ M_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|v_0(\tau)|) d\tau \right\} = O(\exp(-q_2/\varepsilon)) \end{aligned}$$

(сходимость фигурирующего здесь несобственного интеграла вытекает из установленных ранее свойств (1.29) функции $v_0(\tau)$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$). А это означает, что сделанное выше априорное предположение (1.34) действительно выполняется и, следовательно, остаток $\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)$ из (1.30) обладает требуемой экспоненциальной малостью.

Рассмотрим теперь промежуток времени $\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. На нем по-прежнему $x_\varphi(t-1, \varepsilon) = \varphi(t-1)$, а значит, сохраняется асимптотическое равенство (1.20). Будем считать, что для функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$, определяющей-ся из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 - \beta G(x, \varepsilon) + \alpha F(\varphi(t-1), \varepsilon), \\ x|_{t=\sigma_0} &= \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.37)$$

при указанных t выполняется априорная оценка

$$x_\varphi(t, \varepsilon) \geq q, \quad (1.38)$$

где одной и той же буквой q здесь и в последующем обозначаются различные универсальные (не зависящие от t, φ, ε) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Принимая во внимание неравенство (1.38) и используя в очередной раз свойства (1.3), убеждаемся в том, что в данном случае

$$|G(x, \varepsilon)| = O(\exp(-q/\varepsilon)). \quad (1.39)$$

Далее, для начального условия из (1.37) в силу второго равенства (1.29) и установленной выше оценки (1.34) имеем

$$\varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0, \varepsilon) = (\alpha - 1)\sigma_0 + \varepsilon c_0 + O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (1.40)$$

И наконец, учитывая соотношения (1.20), (1.39), (1.40) в (1.37), приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = (\alpha - 1)t + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(t, \varepsilon), \quad \sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0. \quad (1.41)$$

Напомним, однако, что формула (1.41) получена нами при априорном предположении (1.38). Но из (1.41) в свою очередь следует, что условие (1.38) будет выполняться при любом фиксированном $q \in (0, (\alpha - 1)\sigma_0)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, асимптотическое равенство (1.41) доказано.

Перейдем к рассмотрению отрезка $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Особенность этого случая состоит в том, что указанный промежуток времени содержит точку переключения $t = 1$ релейного уравнения (1.7). Поэтому, согласно представлению (1.30), здесь

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon). \quad (1.42)$$

Для функции же $x_\varphi(t, \varepsilon)$, определяющейся из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 + \alpha F(x_\varphi(t - 1, \varepsilon), \varepsilon) - \beta G(x, \varepsilon), \\ x|_{t=1-\sigma_0} &= (\alpha - 1)(1 - \sigma_0) + \varepsilon c_0 + \Delta_{2,\varphi}(1 - \sigma_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.43)$$

по-прежнему считаем выполненным априорное условие (1.38).

При асимптотическом анализе задачи (1.43) нам потребуется аналогичная (1.35) оценка

$$|f(\exp s_1) - f(\exp s_2)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp(-|v_0((t - 1)/\varepsilon)|) |\Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon)|,$$

где $s_1 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon)/\varepsilon$, $s_2 = v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}$, $M > 0$ — универсальная константа, а t изменяется на отрезке $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Объединяя это неравенство с формулами (1.39), (1.42), после несложных преобразований из (1.43) выводим, что

$$\begin{aligned} x_\varphi(t, \varepsilon) &= \alpha - 1 + \varepsilon[(\alpha - 1)\tau + c_0 + \alpha a(\tau)]|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(t, \varepsilon), \\ &1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где функция $a(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$a(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (f(\exp v) - 1)|_{v=v_0(s)} ds. \quad (1.45)$$

Как и в предыдущем случае, формула (1.44) носит пока условный характер, так как она получена в предположении (1.38). Поэтому для ее обоснования достаточно убедиться в том, что правая часть равенства (1.44) действительно удовлетворяет оценке (1.38) при надлежащем выборе постоянной $q > 0$.

При решении поставленной задачи необходима информация о поведении при $\tau \rightarrow \pm\infty$ функции (1.45). В связи с этим представим ее в виде

$$a(\tau) = -\tau + \int_{-\infty}^0 (f(\exp v_0(s)) - 1) ds + \int_0^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds - \int_{\tau}^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds.$$

Отсюда и из (1.45) с учетом свойств функций $f(u)$, $v_0(\tau)$ (см. (1.3), (1.29)) очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} a(\tau) &= O(\exp(\alpha - \beta - 1)\tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ a(\tau) &= -\tau + a_0 + O(\exp(-(\alpha - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\infty}^0 (f(\exp v_0(s)) - 1) ds + \int_0^{+\infty} f(\exp v_0(s)) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{v_0(0)} \frac{f(\exp v) - 1}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv + \int_{v_0(0)}^{+\infty} \frac{f(\exp v)}{\alpha - 1 - \beta g(\exp v)} dv. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Возвращаясь к равенству (1.44) и подставляя в его правую часть формулы (1.46), приходим к выводу, что при дополнительном ограничении

$$\sigma_0 < \alpha - 1 \quad (1.48)$$

на параметр σ_0 (которое всюду ниже считаем выполненным) требуемая оценка (1.38) оказывается справедливой на отрезке $t \in [1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0]$ при любом фиксированном q из интервала $0 < q < \min(\alpha - 1 - \sigma_0, (\alpha - 1)(1 - \sigma_0))$.

Прежде чем перейти к рассмотрению очередного промежутка времени, попытаемся упростить формулу для a_0 из (1.46). Недостаток последнего равенства (1.47) заключается в том, что в нем фигурирует величина $v_0(0)$, для которой нет явного выражения. Однако от этой трудности удается избавиться.