

А. Б. Сергиенко

# Цифровая обработка СИГНАЛОВ

3-е издание



bhv®

**А. Б. Сергиенко**

# **Цифровая обработка СИГНАЛОВ**

**3-е издание**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших заведений, обучающихся по направлению 210300 «Радиотехника»

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2011

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973(я73)

С32

## **Сергиенко А. Б.**

С32 Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 768 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0606-9

Учебное пособие представляет собой базовый курс по цифровой обработке сигналов. Изложены основы теории дискретных сигналов и систем, рассмотрены методы спектрального анализа и фильтрации дискретных сигналов, алгоритмы синтеза дискретных фильтров, влияние эффектов квантования и конечной точности вычислений на работу цифровых устройств, описаны методы модуляции, применяемые для передачи цифровой информации, обсуждаются адаптивные фильтры и многократная обработка сигналов. Вводные главы посвящены основам анализа сигналов и теории аналоговых систем. Материал изложен так, чтобы наглядно продемонстрировать сущность алгоритмов, их взаимосвязь и области применения. Теоретические сведения сопровождаются примерами реализации обсуждаемых алгоритмов с помощью системы MATLAB и ее пакетов расширения Signal Processing, Communications, Filter Design и Fixed-Point. Третье издание книги отражает изменения, произошедшие в последних версиях MATLAB (вплоть до Release 2010a).

*Для студентов технических вузов, инженеров и специалистов,  
работающих в области обработки сигналов*

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973(я73)

### **Группа подготовки издания:**

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Евгений Рыбаков</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Юрий Рожко</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольги Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн серии	<i>Инны Тачиной</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Фото	<i>Кирилла Сергеева</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

*А. И. Солонина*, канд. техн. наук, доц., проф. кафедры цифровой обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. А. М. Бонч-Бруевича

*Э. Л. Муру*, канд. техн. наук, доц. кафедры радиоприемных устройств Московского энергетического института (Технического университета)

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 01.10.10.

Формат 70×100<sup>1/16</sup>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 61,92.

Тираж 1500 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию № 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ГУП "Типография "Наука"  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0606-9

© Сергиенко А. Б., 2010

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2010

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>1</b>
Структура книги.....	2
Чего нет в этой книге.....	5
Благодарности.....	5
Информация от компании The MathWorks, Inc.....	6
От издательства.....	6
<b>Глава 1. Основы анализа сигналов</b> .....	<b>7</b>
Классификация сигналов .....	8
Энергия и мощность сигнала.....	11
Ряд Фурье .....	12
Синусно-косинусная форма .....	13
Вещественная форма .....	14
Комплексная форма.....	14
Примеры разложения сигналов в ряд Фурье .....	16
Преобразование Фурье.....	22
Примеры расчета преобразования Фурье .....	24
Свойства преобразования Фурье.....	33
Фурье-анализ неинтегрируемых сигналов.....	37
Корреляционный анализ .....	40
Корреляционная функция .....	40
Взаимная корреляционная функция.....	42
Связь между корреляционными функциями и спектрами сигналов .....	44
Энергетические расчеты в спектральной области .....	45
Комплексная огибающая.....	45
Преобразование Гильберта .....	47
Спектр аналитического сигнала .....	48
Пространство сигналов .....	50
Метрическое пространство .....	50
Линейное пространство.....	51
Нормированное линейное пространство .....	52
Пространство со скалярным произведением.....	53
Дискретные представления сигналов.....	53
Интегральные представления сигналов .....	56

Случайные сигналы .....	58
Ансамбль реализаций .....	58
Модели случайных процессов .....	59
Вероятностные характеристики случайных процессов .....	61
Корреляционные функции случайных процессов .....	66
Стационарные и эргодические случайные процессы .....	69
Спектральные характеристики случайных процессов .....	73
Теорема Винера — Хинчина .....	75
Узкополосный случайный процесс .....	78
<b>Глава 2. Аналоговые системы .....</b>	<b>85</b>
Классификация систем .....	85
Характеристики линейных систем .....	86
Импульсная характеристика .....	86
Переходная характеристика .....	87
Условие физической реализуемости .....	87
Комплексный коэффициент передачи .....	88
Коэффициент передачи по мощности .....	88
Фазовая и групповая задержка .....	88
Взаимный спектр выходного и входного сигналов .....	89
Взаимная корреляция между входом и выходом .....	89
Преобразование случайного процесса в линейной системе .....	90
Спектральная плотность мощности .....	90
Корреляционная функция .....	90
Дисперсия .....	90
Плотность вероятности .....	91
Частный случай белого шума .....	91
Способы описания линейных систем .....	91
Дифференциальное уравнение .....	92
Функция передачи .....	92
Нули и полюсы .....	93
Полюсы и вычеты .....	95
Пространство состояний .....	98
Функции MATLAB для расчета линейных цепей .....	101
Расчет частотных характеристик .....	101
Построение графиков фазочастотных характеристик .....	103
Построение годографа функции передачи .....	104
Преобразование способов описания линейных цепей .....	105
Расчет аналоговых фильтров-прототипов .....	109
Частотные преобразования фильтров .....	122
Расчет аналоговых фильтров .....	130
Выбор порядка фильтра .....	132
Расчет групповой задержки .....	134
<b>Глава 3. Дискретные сигналы .....</b>	<b>138</b>
Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы .....	138
Аналого-цифровое и цифроаналоговое преобразование .....	139
Частота Найквиста .....	140
Спектр дискретного сигнала .....	141
Влияние формы дискретизирующих импульсов .....	147

Теорема Котельникова .....	149
Восстановление радиосигнала по отсчетам видеосигнала .....	153
Квадратурная дискретизация узкополосных сигналов .....	154
Субдискретизация сигнала .....	155
Z-преобразование .....	159
Примеры вычисления $z$ -преобразования .....	159
Связь $z$ -преобразования с преобразованиями Лапласа и Фурье .....	161
Свойства $z$ -преобразования .....	162
Обратное $z$ -преобразование .....	164
Пространство дискретных сигналов .....	165
Дискретные случайные сигналы .....	165
Корреляционная матрица .....	166
Дискретный белый шум .....	167
Дискретные сигналы в MATLAB .....	167
Расчет временных функций .....	168
Функции генерации одиночных импульсов .....	172
Генерация последовательности импульсов .....	179
Функции генерации периодических сигналов .....	182
Генерация сигнала с меняющейся частотой .....	186
Формирование случайных сигналов .....	189
Получение данных из внешних источников .....	194
Чтение WAV-файлов .....	195
Запись WAV-файлов .....	199
Воспроизведение звука .....	199
Запись звука .....	201
Готовые записи сигналов .....	202
Пакет расширения Data Acquisition .....	203
<b>Глава 4. Дискретные системы .....</b>	<b>206</b>
Сущность линейной дискретной обработки .....	206
Способы описания дискретных систем .....	210
Импульсная характеристика .....	210
Функция передачи .....	212
Нули и полюсы .....	213
Полюсы и вычеты .....	218
Пространство состояний .....	220
Фильтры первого и второго порядка .....	221
Фильтры первого порядка .....	221
Условие устойчивости для систем второго порядка .....	224
Резонатор второго порядка .....	225
Режектор второго порядка .....	230
Преобразование случайного сигнала в дискретной системе .....	232
Рекурсивные и нерекурсивные дискретные фильтры .....	234
Нерекурсивные фильтры .....	234
Рекурсивные фильтры .....	237
Формы реализации дискретных фильтров .....	238
Каноническая форма .....	239
Транспонированная форма .....	240
Последовательная (каскадная) форма .....	242
Параллельная форма .....	243

Дискретная фильтрация в MATLAB .....	244
Дискретная свертка .....	244
Обращение свертки .....	245
Функция дискретной фильтрации .....	245
Доступ к внутреннему состоянию фильтра .....	246
Компенсация фазового сдвига .....	247
Расчет импульсной характеристики .....	249
Расчет переходной характеристики .....	250
Расчет частотных характеристик .....	250
Отображение нулей и полюсов фильтра .....	258
Свертка как матричное умножение .....	259
Преобразование способов описания дискретных фильтров .....	260
Объекты дискретных фильтров .....	266
Функции расчета резонаторов второго порядка .....	274
Некоторые идеализированные фильтры .....	275
Дискретное преобразование Гильберта .....	276
Идеальный дифференцирующий фильтр .....	280
Идеальный фильтр задержки .....	282
Визуализатор фильтров .....	285
<b>Глава 5. Спектральный анализ .....</b>	<b>287</b>
Дискретное преобразование Фурье .....	288
Свойства дискретного преобразования Фурье .....	289
Восстановление непрерывного сигнала с помощью ДПФ .....	291
Матрица ДПФ .....	292
Связь ДПФ и спектра дискретного сигнала .....	293
Алгоритм быстрого преобразования Фурье .....	294
БПФ с прореживанием по времени .....	295
БПФ с прореживанием по частоте .....	300
Основание алгоритма БПФ .....	302
Вычислительные затраты при произвольной размерности БПФ .....	303
Выводы .....	304
Взаимосвязь ДПФ и фильтрации .....	304
ДПФ как дискретная фильтрация .....	304
Дискретная фильтрация с помощью ДПФ .....	308
"Идеальная" фильтрация путем обнуления части спектральных отсчетов .....	313
Растекание спектра .....	314
Весовые функции .....	318
Спектр дискретного случайного процесса .....	319
Непараметрические методы .....	320
Периодограмма .....	320
Метод Уэлча .....	321
Параметрические методы .....	322
Авторегрессионная модель .....	322
Метод MUSIC .....	335
Метод EV .....	337
Функции спектрального анализа в MATLAB .....	337
Прямое и обратное ДПФ .....	338
Функция <i>fftshift</i> .....	338

Блоковая фильтрация в частотной области .....	339
Окна .....	339
Функции непараметрического спектрального анализа.....	352
Параметрический спектральный анализ в MATLAB.....	359
Реализация метода MUSIC.....	366
Реализация метода EV .....	369
Хранение и отображение спектральных данных.....	369
<b>Глава 6. Проектирование дискретных фильтров.....</b>	<b>371</b>
Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу.....	371
Метод билинейного $z$ -преобразования.....	372
Метод инвариантной импульсной характеристики.....	373
Прямые методы синтеза.....	376
Оптимальные методы .....	376
Минимизация квадратической ошибки ( $p = 2$ ).....	377
Минимаксная оптимизация ( $p = \infty$ ) .....	379
Субоптимальные методы .....	383
Субоптимальный синтез нерекурсивных фильтров.....	383
Синтез с использованием окон .....	384
Фильтры с косинусоидальным сглаживанием АЧХ .....	389
Синтез дискретных фильтров в MATLAB.....	393
Функции, использующие билинейное $z$ -преобразование .....	396
Функция <i>impinvar</i> .....	401
Функции прямого синтеза рекурсивных фильтров.....	402
Функции синтеза с использованием окон.....	408
Функции расчета ФНЧ с косинусоидальным сглаживанием .....	412
Функция расчета рекурсивного фильтра Гильберта.....	415
Функции минимизации среднеквадратической ошибки.....	415
Реализация метода Ремеза.....	422
Функции пакета Filter Design .....	429
Графическая среда для синтеза и анализа фильтров .....	433
Объекты спецификаций фильтров и среда FilterBuilder.....	443
<b>Глава 7. Эффекты квантования в цифровых системах.....</b>	<b>446</b>
Форматы представления чисел.....	446
Представление отрицательных чисел .....	447
Формат с фиксированной запятой.....	448
Формат с плавающей запятой.....	450
Процесс квантования.....	453
Шум квантования.....	453
Неравномерное квантование.....	455
Эффекты квантования в цифровых фильтрах .....	456
Квантование коэффициентов цифровых фильтров.....	456
Масштабирование коэффициентов цифровых фильтров .....	460
Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений .....	462
Округление промежуточных результатов вычислений .....	465
Аналитическая модель собственного шума в фильтрах с фиксированной запятой.....	466
Предельные циклы.....	470



Учет эффектов конечной точности вычислений в MATLAB .....	473
Функции квантования .....	473
Объекты квантователей .....	477
Квантованные фильтры .....	485
Анализ предельных циклов .....	493
Расширение программы FDATool .....	494
Квантованное БПФ .....	497
<b>Глава 8. Модуляция и демодуляция .....</b>	<b>502</b>
Амплитудная модуляция .....	503
Однотональная АМ .....	505
АМ-сигнал в общем случае .....	509
Энергетические соотношения в АМ-сигнале .....	511
Демодуляция АМ .....	512
Разновидности амплитудной модуляции .....	514
АМ с подавленной несущей .....	514
Однополосная модуляция .....	516
Полярная модуляция .....	520
Угловая модуляция .....	524
Фазовая и частотная модуляция .....	524
Гармоническая угловая модуляция .....	526
Спектр сигнала с гармонической угловой модуляцией .....	528
Ширина спектра сигнала с гармонической УМ .....	532
Демодуляция УМ .....	536
Квадратурная модуляция .....	538
Спектр сигнала с квадратурной модуляцией .....	539
Демодуляция сигнала с квадратурной модуляцией .....	539
Способы модуляции, используемые при передаче цифровой информации .....	541
Частотная манипуляция .....	542
Амплитудная манипуляция .....	547
Фазовая манипуляция .....	547
Квадратурная модуляция .....	548
Широтно-импульсная модуляция .....	558
Функции модуляции и демодуляции пакета Signal Processing .....	562
Амплитудная модуляция .....	563
АМ с подавленной несущей .....	565
Однополосная модуляция .....	565
Фазовая модуляция .....	565
Частотная модуляция .....	566
Квадратурная модуляция .....	567
Широтно-импульсная модуляция .....	567
Времяимпульсная модуляция .....	568
Функции модуляции и демодуляции пакета Communications .....	569
Аналоговая модуляция .....	569
Цифровая модуляция .....	578
<b>Глава 9. Адаптивные фильтры .....</b>	<b>591</b>
Основные понятия адаптивной обработки сигналов .....	592
Оптимальный фильтр Винера .....	593

Градиентный поиск оптимального решения .....	598
Адаптивный алгоритм LMS .....	599
Детерминированная задача оптимальной фильтрации .....	601
Адаптивный алгоритм RLS .....	602
Экспоненциальное забывание .....	606
Применение адаптивных фильтров .....	607
Идентификация систем .....	607
Линейное предсказание .....	607
Подавление шума .....	608
Выравнивание частотной характеристики канала связи .....	609
Эхоподавление .....	610
Объекты адаптивной фильтрации пакета Filter Design .....	611
Примеры реализации адаптивной фильтрации .....	617
Идентификация системы .....	617
Линейное предсказание .....	619
Шумоподавление .....	620
Компенсация искажений, вносимых каналом связи .....	622
<b>Глава 10. Многоскоростная обработка сигналов .....</b>	<b>624</b>
Изменение частоты дискретизации .....	624
Прореживание .....	625
Интерполяция .....	626
Передискретизация .....	628
Многокаскадная реализация прореживания и интерполяции .....	629
Структуры "интегратор — гребенчатый фильтр" .....	631
Полифазные структуры .....	632
Идея полифазного представления сигналов .....	632
Полифазная реализация процесса интерполяции .....	634
Полифазная реализация процесса прореживания .....	635
Банки фильтров .....	638
Банк анализа .....	639
Банк синтеза .....	643
Функции изменения частоты дискретизации в MATLAB .....	647
Функции изменения частоты дискретизации .....	647
Функция прореживания .....	648
Функция интерполяции .....	650
Функции передискретизации .....	652
<b>Приложение 1. Основы работы с MATLAB .....</b>	<b>655</b>
Установка .....	655
Работа в интерактивном режиме .....	656
Справочная система .....	661
Интерфейс главного окна .....	662
Массивы .....	664
Другие типы данных .....	667
Многомерные массивы .....	667
Строки .....	668
Структуры .....	669
Массивы ячеек .....	670

Программирование .....	670
Программы и функции .....	671
Редактор/отладчик М-файлов .....	672
Создание функций .....	672
Путь поиска .....	674
Логические условия .....	675
Условный оператор .....	675
Оператор выбора .....	676
Циклы .....	677
Функции с переменным числом параметров .....	678
Ввод и вывод данных .....	679
Работа с отладчиком .....	681
Оптимизация MATLAB-программ .....	682
Графика .....	689
Двумерная графика .....	689
Трёхмерная графика .....	692
Настройка внешнего вида графиков .....	696
Одновременный вывод нескольких графиков .....	700
Дальнейшее использование графиков .....	702
Дополнительные источники информации .....	703
<b>Приложение 2. Обзор функций MATLAB .....</b>	<b>704</b>
Audiovideo .....	704
Datafun .....	704
Datatypes .....	705
Demos .....	705
Elfun .....	706
Elmat .....	707
Funfun .....	709
General .....	709
Graph2d, Graph3d .....	709
Graphics .....	709
Guide .....	709
Iofun .....	710
Lang .....	710
Matfun .....	710
Ops .....	711
Polyfun .....	711
Sparfun .....	712
Specfun .....	712
Specgraph .....	713
Strfun .....	713
Timefun .....	713
Timeseries .....	714
Uitools .....	714
Winfun .....	714
<b>Приложение 3. Компоненты MATLAB .....</b>	<b>715</b>
MATLAB .....	715
Пакеты расширения MATLAB .....	715
Математика и оптимизация .....	715

Статистика и анализ данных .....	716
Анализ и синтез систем управления.....	716
Обработка сигналов и телекоммуникации.....	717
Обработка изображений.....	717
Тесты и измерения.....	717
Вычислительная биология .....	718
Финансовое моделирование и анализ .....	718
Разработка приложений .....	718
Целевые платформы для разработки приложений.....	719
Связь с базами данных и генерирование отчетов .....	719
Simulink.....	719
Наборы блоков Simulink.....	720
Физическое моделирование .....	720
Имитационная графика .....	721
Анализ и синтез систем управления.....	721
Обработка сигналов и телекоммуникации.....	721
Генерирование исполняемого кода .....	722
Быстрое прототипирование и аппаратно-программное моделирование (Hardware-in-the-Loop).....	722
Верификация, проверка и тестирование моделей .....	722
<b>Приложение 4. Программа SPTool.....</b>	<b>724</b>
Загрузка сигнала .....	725
Просмотр графика сигнала .....	726
Спектральный анализ сигнала .....	727
Расчет фильтра.....	728
Просмотр характеристик фильтра.....	728
Фильтрация сигнала .....	728
Сохранение результатов работы.....	729
<b>Литература .....</b>	<b>731</b>
Радиотехника.....	731
Цифровая обработка сигналов.....	732
MATLAB .....	734
Разное .....	734
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>736</b>



# Введение

Цифровая обработка сигналов (ЦОС; английский термин — *Digital Signal Processing, DSP*) как направление развития науки и техники зародилась в 1950-х годах и поначалу представляла собой довольно экзотическую отрасль радиозлектроники, практическая ценность которой была далеко не очевидной. Однако за прошедшие пятьдесят лет благодаря успехам микроэлектроники системы цифровой обработки сигналов не только воплотились в реальность, но и вошли в нашу повседневную жизнь в виде CD- и DVD-проигрывателей, модемов, сотовых телефонов и многого другого. Более того, в некоторых прикладных областях цифровая обработка сигналов стала вытеснять "традиционную" (аналоговую). Это уже произошло в аудиотехнике, в настоящее время интенсивно идет процесс перехода телевизионного вещания на цифровую основу.

Бурное развитие цифровых технологий во многом изменило как смысл самого понятия "радиотехника", так и требования, предъявляемые к подготовке специалистов в этой области, сделав необходимыми новые знания и умения.

Для приобретения знаний нужна соответствующая литература, причем для каждого читателя своя — в соответствии с его потребностями, интересами и даже темпераментом. Данное учебное пособие является попыткой *понятно объяснить* теоретические основы базовых алгоритмов цифровой обработки сигналов, продемонстрировать их сущность, взаимосвязь и области применения. Иногда это делается, и вполне сознательно, в некоторый ущерб математической строгости, чтобы обилие математических деталей не заслоняло сути вещей. Насколько удачным оказался найденный баланс, судить читателю.

Книга предназначена для широкого круга читателей — студентов, преподавателей, научных работников, программистов и вообще всех, кто интересуется компьютерной обработкой сигналов и иных данных. Требуемая для понимания материала математическая подготовка примерно соответствует первому курсу технического вуза.

В качестве средства создания иллюстрационных примеров выбрана система MATLAB, созданная фирмой The MathWorks, Inc. и являющаяся мировым стандартом в области научных и технических расчетов. Базовая библиотека MATLAB, а также пакеты расширения Signal Processing, Filter Design, Communications и Fixed-

Point содержат большое количество функций, позволяющих легко и быстро осуществлять разнообразные расчеты, связанные с цифровой обработкой сигналов. Для читателей, не знакомых с этой системой, в *приложении 1* приводится краткое описание принципов работы с ней.

Вопросы, касающиеся MATLAB и его пакетов расширения, изложены применительно к версиям программного обеспечения, входящим в весенний выпуск 2010 г. (Release 2010a):

- MATLAB 7.10;
- Signal Processing Toolbox 6.13;
- Filter Design Toolbox 4.7;
- Communications Toolbox 4.5;
- Fixed-Point Toolbox 3.1.

## Структура книги

Книга состоит из десяти глав и четырех приложений. Ее тематический охват, взаимосвязь отдельных глав и их соотношение с темами, не затронутыми в данном учебном пособии, наглядно иллюстрируются рис. В1. Толстая пунктирная линия показывает те границы, в пределах которых сосредоточены обсуждаемые в книге вопросы. Тонкие пунктирные линии объединяют разделы, входящие в родственные или смежные области, так или иначе связанные с ЦОС. Схема никоим образом не претендует на абсолютную полноту, ее цель — показать место, занимаемое рассматриваемыми темами книги в общей структуре разделов ЦОС.

Далее приведен краткий обзор содержания книги.

*Главы 1 и 2*, "Основы анализа сигналов" и "Аналоговые системы", являются вводными и посвящены не цифровым, а аналоговым сигналам и системам. Поскольку методы анализа цифровых и аналоговых сигналов и систем тесно связаны друг с другом, хорошее понимание обсуждаемых в этих главах вопросов необходимо для освоения материала последующих глав.

В *главе 3*, "Дискретные сигналы", рассматриваются принципы математического описания и анализа числовых последовательностей, которые и являются дискретными сигналами. Здесь же обсуждается разница между понятиями аналоговых, дискретных и цифровых сигналов.

В *главе 4*, "Дискретные системы", изложены принципы линейной обработки дискретных сигналов (дискретной фильтрации), рассмотрены способы описания дискретных систем и формы их реализации.

*Глава 5*, "Спектральный анализ", как явствует из ее названия, посвящена вопросам спектрального анализа дискретных сигналов. Здесь рассматриваются дискретное преобразование Фурье и быстрые алгоритмы его вычисления, способы реализации фильтрации в частотной области, а также непараметрические и параметрические методы оценивания спектра дискретного случайного процесса.

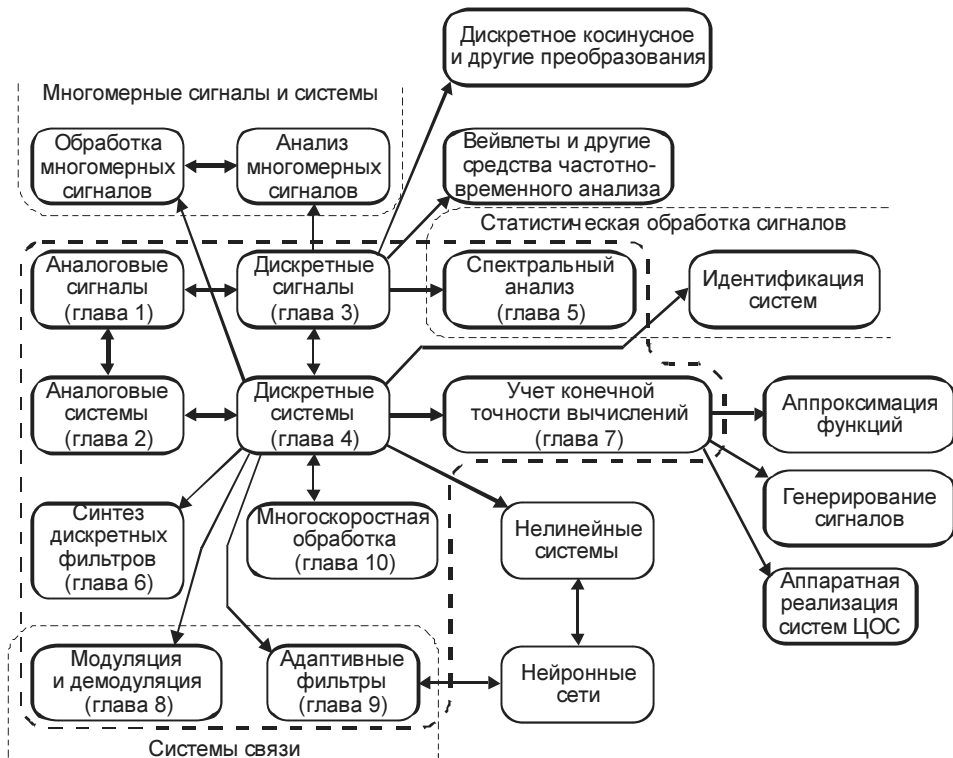


Рис. В1. Основные разделы цифровой обработки сигналов

В главе 6, "Проектирование дискретных фильтров", рассматриваются методы синтеза дискретных фильтров, т. е. способы расчета дискретных систем, удовлетворяющих заданным требованиям. Обсуждаются как методы, связанные с использованием аналоговых фильтров-прототипов, так и прямые методы, основанные на решении оптимизационных задач.

Глава 7, "Эффекты квантования в цифровых системах", посвящена эффектам, возникающим при практической реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов из-за конечной точности представления чисел в вычислительных устройствах. Здесь рассматриваются такие вопросы, как шум квантования, округление коэффициентов и промежуточных результатов вычислений в цифровых фильтрах, возможности возникновения переполнения при вычислениях, а также предельные циклы.

В главе 8, "Модуляция и демодуляция", речь идет о способах преобразования сигналов для их передачи по каналам связи. Рассматриваются методы модуляции, используемые для передачи как аналоговых сигналов (амплитудная, угловая и квадратурная модуляция), так и цифровой информации (амплитудная, частотная, фазовая и квадратурная манипуляция).

Глава 9, "Адаптивные фильтры", посвящена устройствам, автоматически подстраивающим свои параметры под статистические свойства обрабатываемого сигнала. Такие фильтры получили широкое распространение, прежде всего, в системах циф-



ровой связи. В данной главе рассматриваются вопросы оптимальной фильтрации, а также два наиболее известных алгоритма адаптации — *LMS* (Least Mean Square, метод наименьшего квадрата, в отечественных источниках иногда используется аббревиатура МНК) и *RLS* (Recursive Least Squares, рекурсивный метод наименьших квадратов, в отечественных источниках — аббревиатура РНК).

Наконец, в *главе 10*, "Многоскоростная обработка сигналов", речь идет о системах, изменяющих частоту дискретизации сигнала. Рассматриваются алгоритмы прореживания и интерполяции сигнала, а также обсуждаются принципы построения банков фильтров.

Три из четырех приложений посвящены системе MATLAB. В *приложении 1* изложены основы работы с MATLAB, *приложение 2* содержит краткий обзор базовой библиотеки функций MATLAB, а в *приложении 3* перечислены компоненты MATLAB.

В *приложении 4* приводится описание графической среды *SPTool* (Signal Processing Tool), имеющейся в одном из рассматриваемых в книге пакетов расширения MATLAB — Signal Processing Toolbox. Эта программа позволяет просматривать графики сигналов, производить спектральный анализ, рассчитывать дискретные фильтры и осуществлять фильтрацию сигнала. Данные операции относятся к тематике *глав 3—6*, поэтому, чтобы не разбивать описание программы *SPTool* на несколько частей, соответствующая информация помещена в отдельное приложение.

Во всех главах, начиная со второй, важное место отводится описанию функций MATLAB, реализующих рассматриваемые алгоритмы. Как правило, в первой половине главы содержится теоретическая информация, а вторая половина посвящена соответствующим средствам MATLAB. При этом демонстрационные примеры в теоретической части реализованы в основном с помощью общематематических функций MATLAB, без использования специализированных средств обработки сигналов. Это сделано для того, чтобы более наглядно продемонстрировать внутреннюю сущность реализуемых алгоритмов. Однако упомянутое разделение материала не является абсолютным — иллюстрации, необходимые при изложении теоретических вопросов, не всегда удается получить без специальных средств MATLAB, а при описании функций MATLAB иногда возникает необходимость привести дополнительные теоретические сведения. Таким образом, теоретическая и "компьютерная" части глав книги дополняют друг друга, предоставляя читателю возможность взглянуть на обсуждаемые вопросы с разных точек зрения.

В книге много иллюстраций, полученных с помощью MATLAB, при этом во всех случаях приводится и соответствующий программный код. Разумеется, при описании многих функций MATLAB также демонстрируется их использование. Таким образом, книга содержит множество примеров реализации алгоритмов обработки сигналов средствами MATLAB, так что заинтересованный читатель сможет освоить эту систему и использовать ее для решения собственных задач.

Следующее необходимое замечание касается терминологии. Наука и техника интернациональны по самой своей природе, и бурное развитие информационных технологий лишь сделало это еще более очевидным. Поэтому любому, кто занимается

обработкой сигналов, приходится иметь дело с множеством зарубежных, и прежде всего англоязычных, источников информации. Помимо собственно владения английским языком это требует знания терминологии, которая не всегда соответствует принятой в отечественной литературе. Чтобы облегчить читателю работу с англоязычной литературой, при введении новых понятий в книге приводятся соответствующие английские термины.

## Чего нет в этой книге

Книга является *базовым* курсом по цифровой обработке сигналов, поэтому в ней обсуждаются фундаментальные положения и отсутствуют разделы, касающиеся более сложных вопросов, таких как решетчатые фильтры, вейвлет-анализ, идентификация систем, двумерная обработка сигналов, нейронные сети и т. д. Задача книги — лишь *подготовить* читателя к восприятию этих актуальных и современных тем. Чтобы быстро прикинуть, рассматриваются ли в книге интересующие вас вопросы, взгляните на приведенный ранее рис. В1, где показано место, занимаемое книгой в общей структуре разделов ЦОС.

Данная книга не является справочником по рассматриваемым пакетам расширения MATLAB, хотя в ней описана значительная часть функций пакетов Signal Processing, Filter Design и Communications. Следует иметь в виду, что при описании некоторых функций MATLAB приведены не все, а лишь наиболее употребительные способы их вызова. Наиболее полную информацию о функциях можно получить лишь из документации MATLAB и пакетов расширения.

## Благодарности

Прежде всего хотелось бы поблагодарить самых близких мне людей — жену Юлию и сына Андрея — за терпение и понимание.

Вот уже более двадцати лет моя жизнь связана с факультетом радиотехники и телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ". Спасибо учителям и коллегам, во многом определившим мой путь как преподавателя и специалиста — без них эта книга никогда не была бы написана.

Хочу сказать большое спасибо участникам форума на сайте <http://matlab.exponenta.ru> — за все вопросы, заданные мне за почти десять лет существования этого ресурса. Сетевое общение с широкой аудиторией — это замечательная для преподавателя возможность понять, как воспринимаются те или иные вопросы и как именно их следует объяснять.

Огромная благодарность также всем сотрудникам издательства "БХВ-Петербург", принявшим участие в подготовке и выпуске книги.

Особой благодарности заслуживает фирма The MathWorks, Inc. — за создание замечательной компьютерной системы MATLAB и за предоставление в распоряже-

ние автора последних версий MATLAB и описываемых в книге пакетов расширения.

## Информация от компании The MathWorks, Inc.

MATLAB® — зарегистрированная торговая марка, принадлежащая компании The MathWorks, Inc. The MathWorks не гарантирует отсутствия ошибок в тексте и программном коде, приведенных в этой книге. Обсуждение в данной книге пакета MATLAB® и иных программных продуктов не означает какого-либо одобрения предлагаемых способов их использования со стороны The MathWorks, Inc. Далее приводится контактная информация компании The MathWorks, Inc.:

The MathWorks, Inc.

3 Apple Hill Drive

Natick, MA, 01760-2098 USA

Phone: 508-647-7000

Fax: 508-647-7001

E-mail: [info@mathworks.com](mailto:info@mathworks.com)

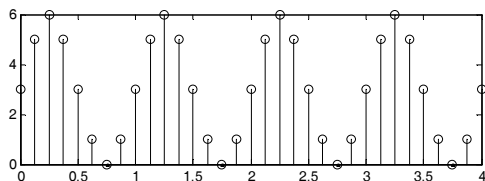
Web: [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

## От издательства

Ваши замечания, предложения, вопросы отправляйте по адресу электронной почты [mail@bhv.ru](mailto:mail@bhv.ru). Мы будем рады узнать ваше мнение!

Подробную информацию о наших книгах вы найдете на web-сайте издательства <http://www.bhv.ru>.

# ГЛАВА 1



## Основы анализа сигналов

Анализ — один из ключевых компонентов обработки сигналов. Его теоретические основы рассматриваются в большом числе книг — от учебников и учебных пособий по курсу "Радиотехнические цепи и сигналы" [1—4] до фундаментальных монографий, таких как [5]. В данной главе будут приведены основополагающие понятия и методы анализа сигналов.

Эта глава является вводной, и в ней рассматриваются аналоговые сигналы, а не дискретные или цифровые. Однако методы анализа аналоговых и дискретных сигналов тесно взаимосвязаны, поэтому полноценное освоение изложенного здесь материала необходимо для глубокого понимания *главы 3*, посвященной дискретным сигналам. Глава получилась весьма объемной, поскольку в ней вводится и обсуждается большое количество базовых понятий. Средства MATLAB в данной главе используются в основном для построения графиков.

Основной целью анализа является сравнение сигналов друг с другом для выявления их сходства и различия. Можно выделить три основных составляющих анализа сигналов:

- **измерение числовых параметров сигналов.** К таким параметрам прежде всего относятся энергия, средняя мощность и среднеквадратическое значение, а речь об их расчете пойдет в *разд. "Энергия и мощность сигнала" этой главы*;
- **разложение сигнала на элементарные составляющие** для их рассмотрения по отдельности либо для сравнения свойств различных сигналов. Такое разложение производится с использованием рядов и интегральных преобразований, важнейшими среди которых являются ряд Фурье и преобразование Фурье. Им будут посвящены одноименные разделы;
- **количественное измерение степени "похожести" различных сигналов.** Такое измерение производится с применением аппарата корреляционного анализа, который будет рассмотрен в соответствующем разделе.

Кроме того, во многих случаях полезным оказывается представление сигналов в виде *векторов*, для которых определены понятия размера, взаимного расстояния и т. п. Об этом пойдет речь в *разд. "Пространство сигналов" этой главы*.

## Классификация сигналов

Прежде чем приступить к рассмотрению задач анализа сигналов, выделим некоторые классы сигналов, которые будут часто встречаться нам в дальнейшем. Это необходимо по двум причинам. Во-первых, проверка принадлежности сигнала к конкретному классу сама по себе является процедурой анализа. Во-вторых, для представления и анализа сигналов разных классов зачастую приходится использовать разные средства и подходы.

Итак, что же такое сигнал? В наиболее общей формулировке это зависимость одной величины от другой (т. е. с математической точки зрения *сигнал* является *функцией*). Чаще всего рассматриваются зависимости от времени, хотя это не обязательно. Например, в системах оптической обработки информации сигналом может являться зависимость интенсивности света от пространственных координат. Физическая природа сигнала может быть весьма различной. Очень часто это напряжение, несколько реже — ток, возможны и многие другие физические величины.

В данной книге подразумевается (если иное не оговорено специально), что *сигнал* представляет собой зависимость *напряжения* от *времени*.

А теперь обратимся к собственно классификации.

В зависимости от того, известен ли нам сигнал *точно*, различают детерминированные и случайные *сигналы*. *Детерминированный сигнал* полностью известен — его значение в любой момент времени можно определить точно. *Случайный же сигнал* в любой момент времени представляет собой случайную величину, которая принимает конкретные значения с некоторой *вероятностью*. Специфические свойства случайных сигналов будут рассмотрены в конце данной главы, а основы анализа сигналов мы будем обсуждать применительно к сигналам детерминированным.

Следующий важный класс сигналов — сигналы с *интегрируемым квадратом*. Еще их называют сигналами с *ограниченной энергией* (почему, станет ясно из разд. "*Энергия и мощность сигнала*" этой главы). Для таких сигналов  $s(t)$  выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty. \quad (1.1)$$

Многие важные соотношения теории сигналов получены в предположении о конечности энергии анализируемых сигналов. Если это условие не выполняется, приходится менять подходы к решению задачи (см., например, определения понятия корреляционной функции для сигналов с конечной и бесконечной энергией в разд. "*Корреляционная функция*" этой главы) или прибегать к использованию аппарата обобщенных функций (см. разд. "*Фурье-анализ неинтегрируемых сигналов*" в этой главе).

Еще один признак классификации сигналов, существенно влияющий на методы их анализа, — *периодичность*. Для периодического сигнала с периодом  $T$  выполняется соотношение

$$s(t + nT) = s(t) \text{ при любом } t,$$

где  $n$  — произвольное целое число. Если величина  $T$  является периодом сигнала  $s(t)$ , то периодами для него будут и кратные ей значения:  $2T$ ,  $3T$  и т. д. Как правило, говоря о периоде сигнала, имеют в виду минимальный из возможных периодов.

Величина, обратная периоду, называется *частотой повторения сигнала*:  $f = 1/T$ . В теории сигналов также часто используется понятие *круговой частоты*  $\omega = 2\pi f$ , измеряемой в радианах в секунду.

Очевидно, что любой периодический сигнал (за исключением сигнала, тождественно равного нулю) имеет бесконечную энергию.

Следующий класс — сигналы *конечной длительности* (их еще называют *финитными* сигналами). Такие сигналы отличны от нуля только на ограниченном промежутке времени. Иногда говорят, что сигнал *существует* на конечном временном интервале.

Очевидно, что сигнал конечной длительности будет иметь и конечную энергию — если только он не содержит разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции).

Перейдем к более узким классам сигналов. Очень важную роль в технике обработки сигналов играют гармонические колебания, которые в самом общем виде записываются следующим образом:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Гармонический сигнал полностью определяется тремя числовыми параметрами: *амплитудой*  $A$ , *частотой*  $\omega$  и *начальной фазой*  $\varphi$ .

Гармонический сигнал является одним из широко распространенных *тестовых* сигналов, применяющихся для анализа характеристик цепей. Кроме него к тестовым относятся еще две очень важных в радиотехнике функции: дельта-функция и функция единичного скачка.

*Дельта-функция*  $\delta(t)$ , или *функция Дирака*, представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечной амплитудой, расположенный при нулевом значении аргумента функции. "Площадь" импульса тем не менее равна единице:

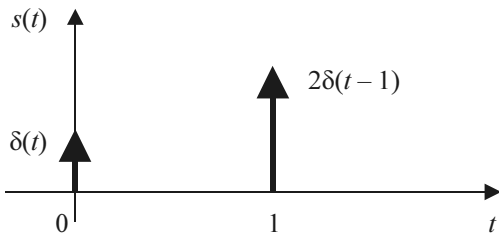
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Разумеется, сигнал в виде дельта-функции невозможно реализовать физически, однако эта функция очень важна для теоретического анализа сигналов и систем.

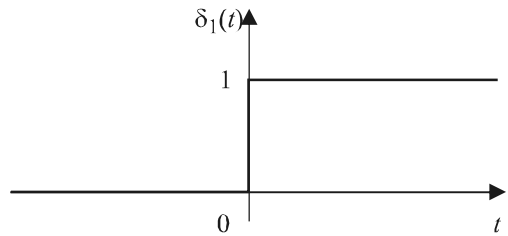
На графиках дельта-функция обычно изображается жирной стрелкой, высота которой пропорциональна множителю, стоящему перед дельта-функцией (рис. 1.1).

Одно из важных свойств дельта-функции — так называемое *фильтрующее свойство*. Оно состоит в том, что если дельта-функция присутствует под интегралом в качестве множителя, то результат интегрирования будет равен значению остального подынтегрального выражения в той точке, где сосредоточен дельта-импульс:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (1.2)$$



**Рис. 1.1.** График сигнала  
 $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t - 1)$



**Рис. 1.2.** Функция единичного скачка

### ЗАМЕЧАНИЕ

Пределы интегрирования в (1.2) не обязательно должны быть бесконечными, главное, чтобы в интервал интегрирования попадало значение  $t_0$ ; в противном случае интеграл будет равен нулю.

Из того факта, что интеграл от дельта-функции дает безразмерную единицу, следует, что размерность самой дельта-функции обратна размерности ее аргумента. Например, дельта-функция времени имеет размерность  $1/c$ , т. е. размерность частоты.

Функция *единичного скачка*  $\delta_1(t)$ , она же *функция Хевисайда*, она же *функция включения*, равна нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных. При нулевом значении аргумента функцию считают либо неопределенной, либо равной  $1/2$ :

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

В MATLAB данную функцию можно смоделировать с помощью оператора сравнения, возвращающего значение 0 или 1:

```
d1 = double(t >= 0);
```

Отличие такой реализации функции включения от формулы (1.3) состоит только в том, что при нулевом значении аргумента результат равен единице; впрочем, в большинстве случаев это отличие несущественно.

График функции единичного скачка приведен на рис. 1.2.

Функцию единичного скачка удобно использовать при создании математических выражений для сигналов конечной длительности. Простейшим примером является формирование прямоугольного импульса с амплитудой  $A$  и длительностью  $T$ :

$$s(t) = A(\delta_1(t) - \delta_1(t - T)).$$

Вообще, любую кусочно-заданную зависимость можно записать в виде единого математического выражения с помощью функции единичного скачка.

Сигналы, отражающие поведение физических величин, являются вещественными функциями времени. Однако в ряде случаев оказывается удобно вводить в рассмот-

рение *комплексные* сигналы (см., например, *разд. "Комплексная огибающая"* далее в этой главе). Одним из простейших комплексных сигналов является комплексное гармоническое колебание

$$\dot{s}(t) = A \exp(j(\omega t + \varphi)) = \dot{A}_m \exp(j\omega t),$$

где  $\dot{A}_m = A \exp(j\varphi)$  — комплексная амплитуда данного сигнала.

## Энергия и мощность сигнала

В начале этой главы в качестве одной из составляющих анализа сигналов было названо измерение их количественных параметров. На практике очень часто используются такие параметры, как энергия и мощность сигнала. Их определения, принятые в теории сигналов, отличаются от обычных, а потому требуют некоторых комментариев.

Начнем с обычных, "физических" понятий мощности и энергии. Если к резистору с сопротивлением  $R$  приложено постоянное напряжение  $U$ , то выделяющаяся в резисторе мощность будет равна

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

За время  $T$  в этом резисторе выделится тепловая энергия, равная

$$E = \frac{U^2 T}{R}.$$

Пусть теперь к тому же резистору приложено не постоянное напряжение, а сигнал  $s(t)$ . Рассеивающаяся в резисторе мощность при этом тоже будет зависеть от времени, т. е. в данном случае речь идет о *мгновенной* мощности (instantaneous power):

$$p(t) = \frac{s^2(t)}{R}.$$

Чтобы вычислить выделяющуюся за время  $T$  энергию, мгновенную мощность необходимо проинтегрировать:

$$E = \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^T s^2(t) dt.$$

Можно ввести также понятие *средней* мощности (average power) за заданный промежуток времени, разделив энергию на длительность временного интервала:

$$P_{\text{cp}} = \frac{E}{T} = \frac{1}{RT} \int_0^T s^2(t) dt.$$

Во все приведенные формулы входит сопротивление нагрузки  $R$ . Однако если энергия и мощность интересуют нас не как физические величины, а как средство *сравнения* различных сигналов, этот параметр можно из формул исключить (принять



$R = 1$ ). Тогда мы получим определения энергии, мгновенной мощности и средней мощности, принятые в теории сигналов:

$$E = \int_0^T s^2(t) dt, \quad p(t) = s^2(t), \quad P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.4)$$

"Мощность" здесь имеет размерность  $\text{В}^2$  (вольт в квадрате), а "энергия" —  $\text{В}^2 \cdot \text{с}$ .

### ЗАМЕЧАНИЕ

Данные параметры иногда называют *удельной мощностью* и *энергией*, чтобы подчеркнуть подразумеваемое при этом единичное значение сопротивления нагрузки.

Энергия сигнала может быть конечной или бесконечной. Например, любой сигнал конечной длительности будет иметь конечную энергию (если только он не содержит дельта-функций или ветвей, уходящих в бесконечность). А любой периодический сигнал, напротив, имеет бесконечную энергию.

Если энергия сигнала бесконечна, можно определить его среднюю *мощность* на всей временной оси. Для этого нужно воспользоваться формулой (1.4) и выполнить предельный переход, устремив интервал усреднения в бесконечность:

$$P_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt. \quad (1.5)$$

Средняя мощность в такой формулировке представляет собой *средний квадрат* сигнала (английский термин — mean square, *MSQ*).

Квадратный корень из средней мощности дает *среднеквадратическое (действующее)* значение сигнала (английский термин — root mean square, *RMS*):

$$\sigma_s = \sqrt{P_{\text{cp}}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt}. \quad (1.6)$$

Для периодического сигнала предельный переход в формулах (1.5) и (1.6) выполнять не обязательно — достаточно выполнить усреднение по периоду  $T$ .

## Ряд Фурье

Разложению в ряд Фурье могут подвергаться *периодические* сигналы. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, имеющими некоторый общий делитель. Чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять *условиям Дирихле*:

- не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);
- число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;

□ число экстремумов должно быть конечным (в качестве примера функции, которая на конечном интервале имеет бесконечное число экстремумов, можно привести  $\sin(1/x)$  в окрестности нуля).

В зависимости от конкретной формы базисных функций различают несколько форм записи ряда Фурье.

**ЗАМЕЧАНИЕ**

Ряд Фурье может быть применен для представления не только периодических сигналов, но и сигналов конечной длительности. При этом оговаривается временной интервал, для которого строится ряд Фурье, а в остальные моменты времени сигнал считается равным нулю. Для расчета коэффициентов ряда такой подход фактически означает *периодическое продолжение* сигнала за границами рассматриваемого интервала. С таким продолжением применительно к дискретному сигналу мы столкнемся также в *главе 5* при рассмотрении дискретного преобразования Фурье.

## Синусно-косинусная форма

В этом варианте ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)). \tag{1.7}$$

Здесь  $\omega_1 = 2\pi/T$  — круговая частота, соответствующая периоду повторения сигнала, равному  $T$ . Входящие в формулу кратные ей частоты  $k\omega_1$  называются *гармониками*; гармоники нумеруются в соответствии с индексом  $k$ ; частота  $\omega_k = k\omega_1$  называется  $k$ -й гармоникой сигнала. Коэффициенты ряда  $a_k$  и  $b_k$  рассчитываются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Константа  $a_0$  рассчитывается по общей формуле для  $a_k$ . Ради этой общности и введена несколько странная на первый взгляд форма записи постоянного слагаемого (с делением на два). Само же это слагаемое представляет собой среднее значение сигнала на периоде:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ**

Пределы интегрирования не обязательно должны быть такими, как в приведенных выше формулах (от  $-T/2$  до  $T/2$ ). Интегрирование может производиться по *любому* интервалу длиной  $T$  — результат от этого не изменится. Конкретные пределы выбираются из соображений удобства вычислений; например, может оказаться удобнее выполнять интегрирование от 0 до  $T$ .

Если  $s(t)$  является *четной* функцией, то все  $b_k$  будут равны нулю и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только *косинусные* слагаемые. Если  $s(t)$  является *нечетной* функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты  $a_k$ , и в формуле останутся лишь *синусные* слагаемые.

## Вещественная форма

Некоторое неудобство синусно-косинусной формы ряда Фурье состоит в том, что для каждой гармоники с частотой  $k\omega_1$  в формуле фигурируют два слагаемых — синус и косинус. Воспользовавшись формулами тригонометрических преобразований, сумму этих двух слагаемых можно трансформировать в косинус той же частоты с иной амплитудой и некоторой начальной фазой:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (1.8)$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \begin{cases} -\arctg \frac{b_k}{a_k}, & a_k \geq 0, \\ -\arctg \frac{b_k}{a_k} \pm \pi, & a_k < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Если  $s(t)$  является четной функцией, фазы  $\varphi_k$  могут принимать только значения 0 и  $\pi$ , а если  $s(t)$  — функция нечетная, то возможные значения для фазы равны  $\pm\pi/2$ .

Данная форма представления ряда Фурье является наиболее естественной с "инженерной" точки зрения, однако ее неудобство заключается в том, что параметры  $A_k$  и  $\varphi_k$  не рассчитываются напрямую — они выражаются либо через синусные и косинусные коэффициенты согласно (1.9), либо через коэффициенты рассматриваемой далее комплексной формы ряда Фурье (см. далее формулу (1.11)).

## Комплексная форма

Данная форма представления ряда Фурье является, пожалуй, наиболее употребимой в радиотехнике. Она получается из вещественной формы представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (такое представление вытекает из формулы Эйлера  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ ):

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}).$$

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} (\exp(jk\omega_1 t + j\varphi_k) + \exp(-jk\omega_1 t - j\varphi_k)).$$

А теперь будем трактовать экспоненты со знаком "минус" в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое  $a_0/2$  станет членом ряда с нулевым номером. В результате получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{-jk\omega_1 t} . \quad (1.10)$$

Комплексные коэффициенты ряда связаны с амплитудами  $A_k$  и фазами  $\varphi_k$ , фигурирующими в вещественной форме записи ряда Фурье (1.8), следующими несложными соотношениями:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} ,$$

$$A_k = 2 |\dot{C}_k| , \quad \varphi_k = \arg(\dot{C}_k) . \quad (1.11)$$

Несложно выглядят и формулы связи с коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$  синусно-косинусной формы ряда Фурье (1.7):

$$\dot{C}_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2} ,$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}(\dot{C}_k) , \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(\dot{C}_k) .$$

Отсюда сразу же следует и формула непосредственного расчета коэффициентов  $\dot{C}_k$  ряда Фурье в комплексной форме:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt . \quad (1.12)$$

Если  $s(t)$  является *четной* функцией, коэффициенты ряда  $\dot{C}_k$  будут чисто *вещественными*, а если  $s(t)$  — функция *нечетная*, коэффициенты ряда окажутся чисто *мнимыми*.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют *амплитудным спектром*, а совокупность их фаз — *фазовым спектром*. Эти понятия не следует путать с амплитудно- и фазочастотными *характеристиками*, которые относятся не к сигналам, а к системам, осуществляющим обработку сигналов.

Если анализируемый сигнал  $s(t)$  является вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают соответственно четной и нечетной симметрией:

$$A_{-k} = A_k , \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k ,$$

а коэффициенты комплексного ряда Фурье — комплексно-сопряженной симметрией:

$$\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^* .$$

## Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

В данном разделе мы применим ряд Фурье для анализа конкретных сигналов.

### Последовательность прямоугольных импульсов

Первым рассматриваемым сигналом будет последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau$  и периодом повторения  $T$ . Начало отсчета времени примем расположенным в середине импульса (рис. 1.3).

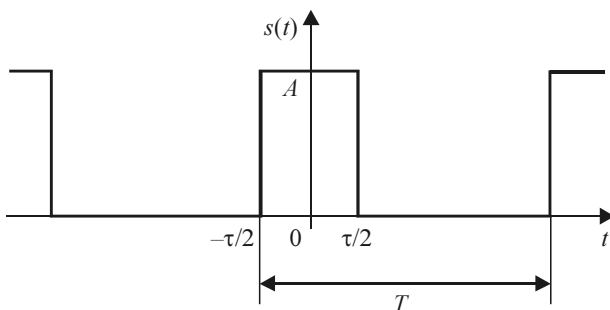


Рис. 1.3. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов ( $t$ )

Данный сигнал является четной функцией, поэтому для его представления удобнее использовать синусно-косинусную форму ряда Фурье — в ней будут присутствовать только косинусные слагаемые  $a_k$ , равные

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right).$$

Длительность импульсов и период их следования входят в полученную формулу не обособленно, а исключительно в виде отношения. Этот параметр — отношение периода к длительности импульсов — называют *скважностью* последовательности импульсов. Обозначим ее буквой  $q$  и введем этот параметр ( $q = T/\tau$ ) в полученную формулу для коэффициентов ряда Фурье, а затем приведем формулу к виду  $\sin(x)/x$ :

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}. \quad (1.13)$$

#### ЗАМЕЧАНИЕ

В зарубежной литературе вместо скважности используется обратная величина, называемая *коэффициентом заполнения* (duty cycle) и равная  $\tau/T$ .

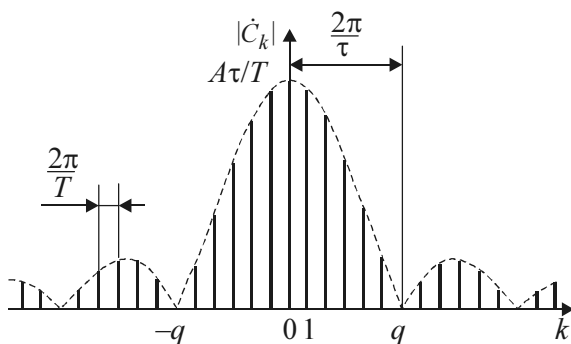
При такой форме записи становится хорошо видно, чему равно значение постоянного слагаемого ряда: поскольку при  $x \rightarrow 0$   $\sin(x)/x \rightarrow 1$ , то

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T}.$$

Теперь можно записать и само представление последовательности прямоугольных импульсов в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right).$$

Амплитуды гармонических слагаемых ряда зависят от номера гармоники по закону  $|\sin(x)/x|$  (рис. 1.4).



**Рис. 1.4.** Коэффициенты ряда Фурье для последовательности прямоугольных импульсов

График функции  $\sin(x)/x$  имеет лепестковый характер. Говоря о ширине этих лепестков, следует подчеркнуть, что для графиков дискретных спектров периодических сигналов возможны два варианта градуировки горизонтальной оси — в номерах гармоник и в частотах. На рис. 1.4 градуировка оси соответствует номерам гармоник, а частотные параметры спектра нанесены на график с помощью размерных линий.

Ширина лепестков, измеренная в количестве гармоник, равна скважности последовательности (при  $k = nq$  имеем  $a_k = a_{nq} = 0$ , если  $n \neq 0$ ). Отсюда следует важное свойство спектра последовательности прямоугольных импульсов — в нем отсутствуют (имеют нулевые амплитуды) гармоники с номерами, кратными скважности.

Расстояние по частоте между соседними гармониками равно частоте следования импульсов —  $2\pi/T$ . Ширина лепестков спектра, измеренная в единицах частоты, равна  $2\pi/\tau$ , т. е. обратно пропорциональна длительности импульсов. Это, как мы увидим далее, проявление общего закона — чем короче сигнал, тем шире его спектр.

## Меандр

Важным частным случаем предыдущего сигнала является *меандр* — последовательность прямоугольных импульсов со скважностью, равной двум, когда длительности импульсов и промежутков между ними становятся равными (рис. 1.5).